

**PROYECTO INTEGRADOR DE INGENIERÍA EN
TELECOMUNICACIONES**

**ANÁLISIS DE COMPONENTES ESTOCÁSTICOS EN
EL CLUTTER DE RADARES BIESTÁTICOS**

Ignacio Martín Gavier
Estudiante

Dr. Damián Horacio Zanette
Director

Miembros del Jurado
Ing. Roberto Costantini (Instituto Balseiro)
Dr. Javier Alberto Areta (Instituto Balseiro)

Diciembre de 2017

Física Estadística e Interdisciplinaria – Centro Atómico Bariloche

Instituto Balseiro
Universidad Nacional de Cuyo
Comisión Nacional de Energía Atómica
Argentina

A mis padres, Silvia y Enrique,
a mis hermanos, Carlos y Magdalena,
a mis abuelos, Carlos, Luciana, Enrique y Lilian,
a mi novia, Cecilia.

Índice de contenidos

Índice de contenidos	ii
Índice de figuras	iv
Índice de tablas	vi
Resumen	vii
Abstract	viii
Introducción	1
1. Conceptos preliminares	3
1.1. Radares	3
1.1.1. Conceptos generales	3
1.1.2. Sección eficaz (RCS)	4
1.1.3. Clutter	5
1.1.4. Radares biestáticos	7
1.1.5. Sección eficaz biestática (BRCS)	8
1.1.6. Corrimiento Doppler	9
1.2. Función de transferencia	9
1.3. Procesos aleatorios	10
1.3.1. Esperanza, autocorrelación y varianza	10
2. Propagación y función de transferencia	12
2.1. Modelos de propagación	12
2.2. Modelos de reflexión	13
2.3. Configuración biestática con reflectores puntuales y función de transferencia	14
2.3.1. Aproximación a distribución continua de reflectores	16
2.3.2. Función de transferencia para determinadas distribuciones de reflectores	18

3. Cálculo numérico de la función de transferencia	21
3.1. Generación del escenario con reflectores	21
3.1.1. Generación aleatoria de las coordenadas de los reflectores	22
3.2. Propiedades estadísticas de la función de transferencia	23
3.3. Comparación entre resultados analíticos y simulaciones numéricas	26
4. Función de transferencia con sección eficaz aleatoria de los reflectores	30
4.1. Aleatoriedad en la sección eficaz de los reflectores	30
4.2. Comparación de resultados analíticos con simulaciones numéricas	33
4.3. Cambio de fase por reflexiones	34
4.4. Simulaciones con cambio de fase en la reflexión	36
5. Función de transferencia con alturas de reflectores aleatorias	38
5.1. Altura aleatoria de los reflectores con distribución plana	38
5.2. Simulaciones de transferencia con fluctuaciones en alturas de reflectores	41
5.3. Altura aleatoria de los reflectores con distribución no plana	42
6. Aplicación a radar biestático situado en alrededores de Bariloche	45
6.1. Descripción del entorno y modelo digital de terreno	45
6.2. Descripción del sistema	46
6.3. Función de transferencia con sección eficaz constante	47
6.4. Aleatoriedad en las alturas de reflectores	49
6.5. Aplicación en etapa de procesamiento en recepción	50
6.6. Cálculo de coeficientes para estimar señal de recepción	50
6.7. Utilización de modelos empíricos de propagación	52
Conclusiones	57
A. Detalle de cálculos en coordenadas elípticas	59
B. Coordenadas UTM	61
Bibliografía	64
Publicaciones asociadas	66
Agradecimientos	67

Índice de figuras

1.1. Esquema radar básico	4
1.2. Distribuciones de probabilidad sección eficaz	6
1.3. Radar biestático	7
1.4. Curvas de ángulo biestático constante	8
2.1. Propagación espacio libre	13
2.2. Reflexión en objeto puntual	14
2.3. Modelo de multicamino	15
2.4. Coordenadas elípticas	17
2.5. Funciones de transferencia	19
3.1. Grillado regular en (μ, ν)	24
3.2. Simulaciones función de transferencia	28
3.3. Varianza de la función de transferencia	29
4.1. Varianza de la transferencia con aleatoriedad en sección eficaz	34
4.2. Esperanza de la transferencia con aleatoriedad en la fase.	37
5.1. Desviación de esperanza de la transferencia con aleatoriedad en las al- turas de reflectores.	41
5.2. Detalle desviación z_i	42
6.1. Escenario Bariloche y alrededores	46
6.2. Zonas de línea de vista	47
6.3. Transferencia escenario Bariloche	48
6.4. Desviación transferencia con alturas aleatorias en escenario Bariloche .	49
6.5. Anillos de elipse	51
6.6. Mapa de composiciones superficiales de paisaje	52
6.7. Coeficientes a_l	53
6.8. Anillos de elipse del radar en Bariloche	53
6.9. Pérdidas de camino antena Radio Nacional con recomendaciones ITU .	54
6.10. Pérdidas de camino antena de aeropuerto con recomendaciones ITU . .	55

6.11. Coeficientes b_l con recomendaciones ITU	56
--	----

Índice de tablas

2.1. Función transferencia para ciertas distribuciones de reflectores	19
3.1. Esperanza y varianza para ciertas distribuciones de reflectores con posiciones aleatorias	27
6.1. Características antenas radar Bariloche	46
6.2. Secciones eficaces biestáticas	52

Resumen

En este trabajo se presenta un análisis sobre el *clutter* de radares biestáticos, modelado a través de ecos en un conjunto de reflectores puntuales, utilizando el modelo de propagación de espacio libre. Se define una función de transferencia, que representa la superposición de las reflexiones en cada uno de los reflectores y da una medida cuantitativa de la señal de *clutter* recibida. La función de transferencia, que depende de los factores aleatorios de cada reflector, como su posición, su sección eficaz o el cambio de fase en la reflexión, es caracterizada a través de simulaciones que tienen en cuenta estos factores individualmente, obteniendo su esperanza y su varianza en cada caso. Se presentan además resultados analíticos que son comparados con las simulaciones.

Utilizando los mismos modelos, se simula la función de transferencia de *clutter* de un radar biestático pasivo, emplazado en cercanías de San Carlos de Bariloche, cuya señal emitida es el canal FM de Radio Nacional, en 95,5 MHz. Además, se estima la señal recibida dada una señal emitida, a partir de un modelo digital de terreno, considerando las zonas con línea de vista a las antenas transmisora y receptora y asignando una sección eficaz de *clutter* según el tipo de composición superficial del paisaje, utilizando los modelos de propagación de espacio libre y las ITU-R P.1546 e ITU-R P.1812.

Palabras clave: RADARES BIESTÁTICOS, *CLUTTER*, MODELOS DE PROPAGACIÓN, FUNCIÓN DE TRANSFERENCIA.

Abstract

In this work an analysis is presented on the clutter of bistatic radars, modeled through echoes in a set of point scatterers, using the model of free-space propagation. A transfer function is defined, which represents the superposition of the reflections in each scatterer and gives a quantitative measure of the received clutter signal. The transfer function, which depends on the random characteristics of each scatterer, such as its position, radar-cross-section or the phase change in the reflection, is characterized through simulations that take these factors into account individually, obtaining their expected value and variance in each case. In addition, analytical results are presented and then compared with the simulations.

Using the same models, the clutter transfer function of a passive bistatic radar located in the vicinity of San Carlos de Bariloche is simulated. Its emitted signal is the Radio Nacional FM channel, at 95.5 MHz. In addition, the received signal is estimated given an emitted signal, from a digital terrain model, considering zones with line-of-sight to the transmitter and receiver and assigning clutter radar-cross-section according to the landscape surface composition, using the free-space propagation models and ITU-R P.1546 and ITU-R P.1812.

Keywords: BISTATIC RADARS, CLUTTER, PROPAGATION MODELS, TRANSFER FUNCTION.

Introducción

En el marco de los sistemas de sensado y detección remota –con distancias al objetivo mucho mayores que la longitud de onda–, los sistemas de radar biestático, donde la antena receptora se encuentra de la transmisora a una distancia comparable con la del objetivo [1], han sido y siguen siendo objeto de numerosos trabajos en detección de objetivos, como los radares pasivos [2], o en reconstrucción de paisajes, como los radares de apertura sintética (SAR). Históricamente, los radares, y particularmente los biestáticos, han sido desarrollados e impulsados principalmente para uso militar. Sin embargo, la extensión de los sistemas de sensado y detección se ha expandido también a usos civiles, como la meteorología. La separación física entre emisor y receptor, implícita en los radares biestáticos, permite agregar un grado de libertad a los sistemas de sensado para poder desempeñarse en un mayor rango espacial.

Un limitante importante en los sistemas de radar es el *clutter* [3], o señal proveniente de reflexiones en objetos que no se desean detectar. Este factor puede ser un condicionante importante del sistema, que impida el correcto desempeño de la detección del objetivo, cuando sus contribuciones son significativas respecto de la del objetivo.

En este trabajo se pretende representar de manera cuantitativa al *clutter* superficial a través de una función de transferencia, producido por reflexiones en el terreno y que afecta al desempeño de un radar biestático. Esta función de transferencia es modelada como un proceso estocástico que depende de variables aleatorias de distintos orígenes, como la sección eficaz del *clutter*, la posición de los reflectores que lo representan o los cambios de fase producidos en las reflexiones.

Como primera parte del trabajo, se representa al *clutter* a través de una función de transferencia que surge de la contribución de múltiples reflexiones de una distribución superficial de reflectores puntuales. Se analiza cómo es afectada la misma por la cantidad y la aleatoriedad en las posiciones de los reflectores. Luego se analiza cómo es afectada por la aleatoriedad en la sección eficaz de los reflectores, agregando también aleatoriedad en el cambio de fase producido por reflexiones. Por último, se analiza cómo es afectada por la aleatoriedad en la posición vertical de los reflectores, tanto para una distribución plana como tridimensional.

Como segunda parte del trabajo, se modela un sistema de radar biestático pasivo para detección de aviones, emplazado en las cercanías de la ciudad de San Carlos de

Bariloche, buscando representar el *clutter* a través de las múltiples reflexiones en el terreno, y considerando aquellas zonas que tienen línea de vista con la antena transmisora y la receptora. Con el mismo lineamiento que la primera parte, se simula y analiza la función de transferencia de *clutter*. Por último, se calculan coeficientes para estimar la señal recibida dada una señal emitida, de manera de facilitar la detección de los aviones.

Para abordar el trabajo, es necesario introducirse en el tema definiendo algunos conceptos preliminares explicitados en el capítulo 1. Los contenidos de la primera parte, descriptos más arriba, son tratados en los capítulos 2, 3, 4 y 5, mientras que los de la segunda parte son tratados en el capítulo 6.

Capítulo 1

Conceptos preliminares

Previo a ahondar en los objetivos principales, es necesario introducir el marco teórico de los sistemas de radar y de los conceptos más importantes que fueron utilizados en el presente trabajo. En este capítulo se presentan conceptos generales sobre los sistemas de radar y, particularmente, de los radares biestáticos. Además se menciona la definición de función de transferencia y algunas de sus características principales.

1.1. Radares

En esta sección se presentan conceptos elementales para el análisis en los sistemas de radar, cómo se componen y cómo afectan al sistema factores como el *clutter*. Algunos de estos elementos luego se particularizan a los sistemas de radar biestático.

1.1.1. Conceptos generales

La palabra “radar” proviene del acrónimo en inglés de ***Radio Detection And Ranging*** [4]. Los radares son sistemas que utilizan ondas electromagnéticas para la detección y localización de objetos que pueden reflejar estas ondas, como aviones, barcos, automóviles, personas, edificios o incluso características del paisaje natural.

Los radares funcionan irradiando energía electromagnética al medio donde se espera encontrar el objeto y luego detectan el eco producido a causa de la reflexión en ese objeto. Las características del eco permiten tomar una decisión acerca de la presencia o no del objetivo, y lograr su localización. Los sistemas de radar pueden funcionar en un gran rango de distancias hasta el objetivo, e incluso con diversas condiciones de entorno, como en la oscuridad, en la neblina, en la nieve, con la lluvia, etcétera [5].

El principio básico de radar se muestra en la figura 1.1. Un transmisor genera una señal electromagnética que es irradiada al espacio por una antena. La señal se propaga hasta llegar al objetivo, y parte de la energía es reflejada y vuelta a radiar con dirección hacia el radar. El radar detecta el objetivo si la señal recibida supera un determinado

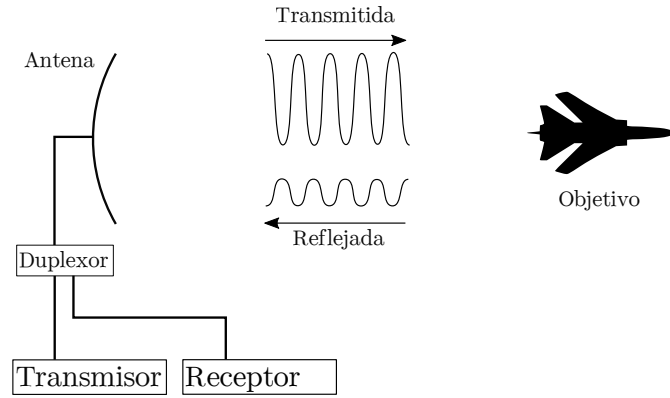


Figura 1.1: Esquema conceptual del funcionamiento básico de un radar.

umbral de decisión en un tiempo t . Una vez que el umbral es superado, la distancia del radar al objetivo puede medirse como

$$d = \frac{ct}{2},$$

siendo c la velocidad de la luz, asumida como velocidad de propagación de la señal y t el tiempo que demora la señal en volver al radar. Es posible que, además de la distancia, se desee conocer la posición y la velocidad del objetivo. La posición puede conocerse, por ejemplo, cuando la antena es directiva a través de su orientación, ya que el objetivo debe estar dentro del lóbulo principal para ser detectado. La velocidad se puede estimar midiendo el efecto Doppler de los ecos recibidos [6].

1.1.2. Sección eficaz (RCS)

La sección eficaz se introduce en la teoría de radares para representar la relación de potencias entre la onda electromagnética que se irradia luego de la reflexión en algún determinado objeto respecto de la onda original [7].

La sección eficaz es el área ficticia sobre la cual se debería interceptar toda la energía incidente sobre el objeto y que luego la vuelva a irradiar isotrópicamente. Si se denomina Q_t a la densidad de potencia que incide sobre el objeto, el total de potencia que se reirradia luego de la reflexión es

$$P_r = \sigma Q_t,$$

siendo σ la sección eficaz del objeto. Y la densidad de esta potencia reflejada, a una distancia d del objeto es

$$Q_r = \frac{P_r}{4\pi d^2},$$

asumiendo que la reirradiación se produce en todas las direcciones. Se puede despejar la sección eficaz, resultando

$$\sigma = 4\pi d^2 \frac{Q_r}{Q_t}. \quad (1.1)$$

Esta definición es escrita de forma que la sección eficaz sea independiente de d como

$$\sigma = 4\pi \lim_{R \rightarrow \infty} \left[R^2 \frac{|\mathbf{E}^r|^2}{|\mathbf{E}^t|^2} \right], \quad (1.2)$$

donde $|\mathbf{E}^r|^2$ y $|\mathbf{E}^t|^2$ son los módulos al cuadrado de los campos eléctricos reflejado e incidente, respectivamente.

Como se mencionó previamente, la sección eficaz da cuenta de la pérdida de potencia de una onda luego de la reflexión en un objeto. En el presente trabajo, sin embargo, se utiliza el concepto de la disminución de amplitud de la onda electromagnética, por lo que se define $\xi = \sqrt{\sigma}$.

La sección eficaz de un objeto no es simplemente una constante, sino que es una función de muchas variables como sus dimensiones, sus características electromagnéticas, ángulo de observación, frecuencia, etcétera. Es por esto que la sección eficaz se modela como una variable aleatoria y ha sido objeto de muchos trabajos. Existen distintas distribuciones de probabilidad con las que se modela a la sección eficaz.

Si se modela a la sección eficaz como muchos reflectores distribuidos aleatoriamente, sin uno dominante, entonces la sección eficaz posee una distribución exponencial,

$$f_\sigma(\sigma) = \frac{e^{-\sigma/\sigma_0}}{\sigma_0},$$

siendo $\sigma \geq 0$ y σ_0 el valor medio de la sección eficaz. La distribución de ξ puede obtenerse de la relación $f_\xi(\xi) = 2\xi f_\sigma(\xi^2) = 2\xi/\sigma_0 \exp(-\xi^2/\sigma_0)$. Este modelo es conocido como Rayleigh/exponencial.

Otros modelos también son utilizados en las aplicaciones de radar, por ejemplo, considerando múltiples reflectores pero con uno dominante (Rician), o más de uno dominante (χ^2 de grado $2m$). Y también existen modelos obtenidos empíricamente (Weibull, Log-normal). En la figura 1.2 se muestran las distribuciones de probabilidad mencionadas para σ y ξ .

1.1.3. Clutter

En los sistemas de radar, se denomina *clutter* a todos los ecos producidos por objetos que no se desean detectar, es decir, todos los objetos capaces de reflejar la onda electromagnética distintos del objetivo que se desea detectar [3]. Los ecos de *clutter* pueden provenir de la superficie terrestre, de árboles, edificios, agua, lluvia,

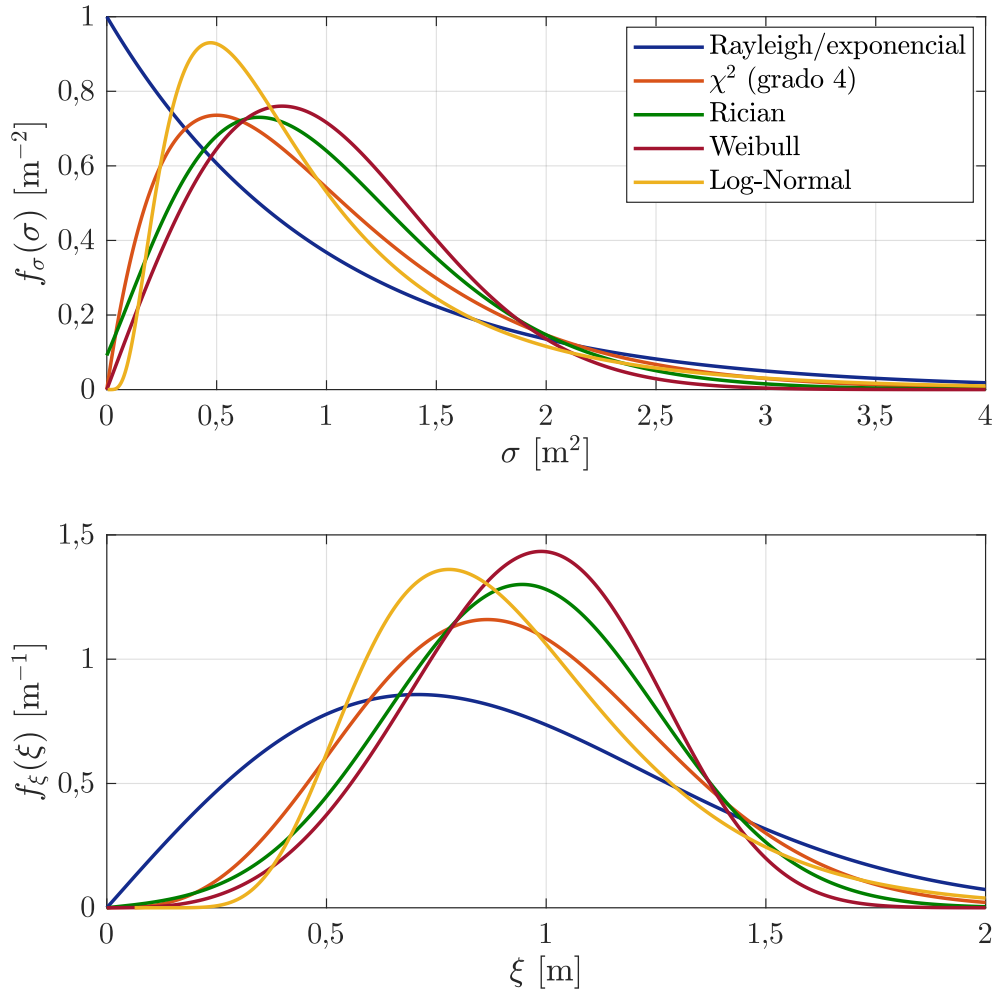


Figura 1.2: Distribuciones de probabilidad comunes para la sección eficaz σ y su raíz cuadrada ξ .

aves, etcétera.

En el presente trabajo se le da especial atención a los ecos de *clutter superficial*, como son los producidos por el terreno o el agua. Este tipo de *clutter* tiene la característica de que la magnitud del eco es proporcional al área iluminada. Para obtener una medida del eco independiente del área iluminada, se define la sección eficaz por unidad de área o *NRCS* (*Normalized Radar Cross Section*) como

$$NRCS = \sigma/A,$$

siendo σ la sección eficaz de la superficie iluminada y A el área de esa superficie. La *NRCS* suele presentarse en unidades de dB.

1.1.4. Radares biestáticos

Los sistemas de radar biestático son aquellos en los que la antena transmisora y la receptora están separadas [8]. Como se muestra en la figura 1.3 una antena transmisora está situada en un determinado lugar y una antena receptora está situada en otro, siendo L la distancia entre ellas, y es definida como línea de base. El objetivo se sitúa en un tercer sitio. Cualquiera de estas tres posiciones puede estar sobre la superficie terrestre, sobre el aire e incluso variar con el tiempo [9].

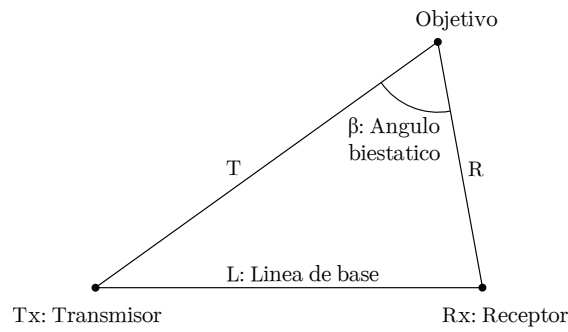


Figura 1.3: Esquema conceptual y nombres utilizados en sistemas de radar biestático.

El ángulo β formado por el transmisor y el receptor con vértice en el objetivo se denomina “ángulo biestático” y se tiene en cuenta para definir cuán biestático es el sistema. Si $\beta \approx 0$, se dice que el sistema es monoestático. De lo contrario, el sistema es biestático. Esta distinción va de la mano con la que establece que un radar es biestático si la dimensión de la línea de base es comparable con la de las distancias recorridas T y R .

El funcionamiento de un radar biestático para la detección de objetivos es más complicado que el de un radar monoestático. El transmisor irradia electromagnéticamente el medio donde se espera encontrar el objetivo, y el receptor mide la diferencia de tiempos en que arriba la señal a través de la línea base y el tiempo en que arriba un eco producido por la reflexión en el objeto. El tiempo que demora la señal en recorrer la línea de base L es $t_0 = L/c$, y el tiempo que demora la señal en recorrer desde el transmisor hasta el objetivo y desde el objetivo hasta el receptor es

$$t = (T + R)/c.$$

Por lo tanto, el receptor, conociendo la distancia L y la diferencia $\Delta t = t - t_0$, puede conocer la suma $T + R = L + c\Delta t$. A diferencia de los radares monostáticos, esta cantidad no define la distancia hacia el objetivo, sino que define curvas isorrango, que

son elipses cuyos focos coinciden con las antenas transmisora y receptora, como se verá en capítulos siguientes. Si la antena receptora es directiva, entonces la posición del objetivo puede obtenerse intersecando la curva isorrango obtenida con la dirección de la antena receptora.

En muchos casos, la señal que viaja por la línea de base tiene mucha mayor potencia que la producida por ecos, causando la saturación del receptor [9]. Para evitarlo, se puede realizar un filtrado en frecuencia (Doppler), filtrado en tiempo o filtrado en espacio, como anulación de la ganancia de antena receptora en dirección de la línea de base.

1.1.5. Sección eficaz biestática (BRCS)

En los sistemas de radar biestáticos, la sección eficaz biestática o *BRCS* (*Bistatic Radar Cross Section*) es una medida de la energía que se refleja luego de una reflexión en un objeto, al igual que en los radares monoestáticos [10]. Sin embargo, la medida de esta cantidad es aún más compleja que en el caso monoestático, ya que además depende del ángulo biestático β .

Existen distintos modelos para la sección eficaz biestática dependiendo de cuán grande sea el ángulo biestático. Se pueden representar tres zonas, la pseudo-monoestática ($\beta \approx 0$), la biestática y la de dispersión frontal ($\beta \approx \pi$). Sin embargo, la mayor parte del espacio cercano a las antenas es abarcada por la zona biestática, lo cual se puede observar en la figura 1.4 donde se muestran curvas de β constante.

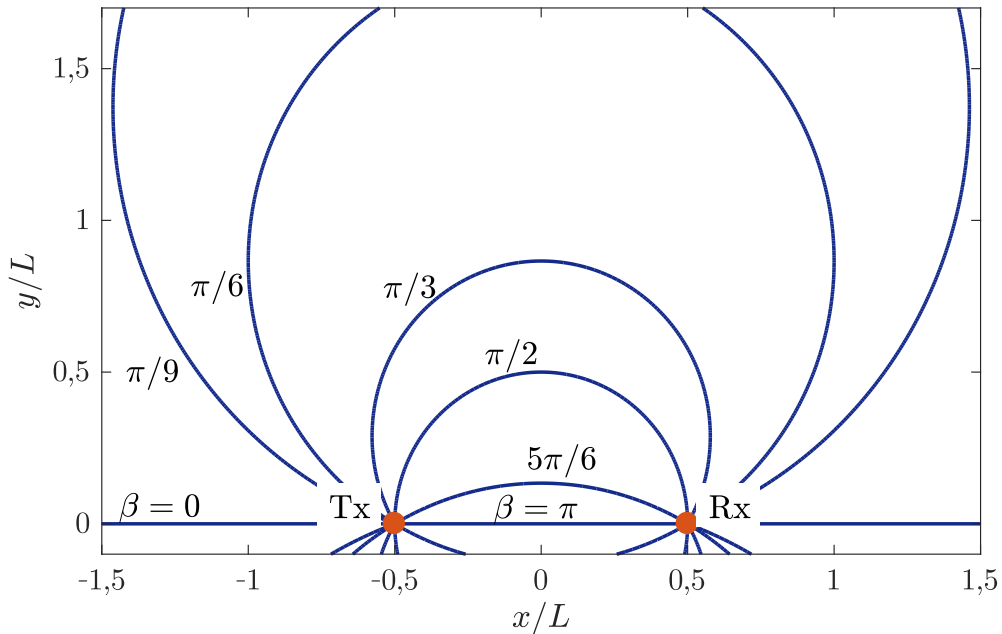


Figura 1.4: Curvas de ángulo biestático β constante.

1.1.6. Corrimiento Doppler

El efecto Doppler está presente en los sistemas de radar cuando un objeto reflejante está en movimiento. Cuando esto sucede, se produce un corrimiento en la frecuencia de la onda reflejada respecto de la transmitida. Este corrimiento es igual a la variación instantánea de la fase de la onda en la recepción [11], es decir,

$$\omega_d = \frac{d\phi}{dt},$$

siendo ϕ la fase de la onda reflejada y ω_d el corrimiento de la frecuencia de la onda reflejada respecto de la incidente. En los sistemas de radar, tanto el objetivo como el *clutter* pueden estar en movimiento y provocar corrimiento Doppler en la onda reflejada.

1.2. Función de transferencia

En la teoría de señales y sistemas se representan las señales como función del tiempo, ya sea continuo o discreto. Generalmente, un sistema puede representarse como un bloque que es excitado con una señal de entrada $x(t)$ y se obtiene una señal de salida $y(t)$. Se dice que un sistema es lineal si cumple con el principio de superposición, y se dice invariante en el tiempo si un retardo en la entrada implica ese retardo en la salida. Los sistemas lineales e invariantes en el tiempo son de particular interés en muchos ámbitos de control y electrónica, y particularmente en el presente trabajo, donde se busca analizar los sistemas de radar biestático y el comportamiento de la señal recibida comparada con la emitida. Si bien los sistemas de radar no son invariantes en el tiempo, los análisis que se hacen en este trabajo son sobre cómo afecta el *clutter*, cuyas propiedades estadísticas varían lentamente respecto de los tiempos de utilización del radar.

Es de utilidad representar a los sistemas invariantes en el tiempo con la función de transferencia [12], que define de manera completa el comportamiento del mismo. La misma puede definirse como la transformada de Fourier de la respuesta al impulso del sistema, es decir,

$$H(\omega) = \mathcal{F}\{h(t)\},$$

siendo ω la frecuencia, $H(\omega)$ la función de transferencia y $h(t)$ la respuesta al impulso del sistema. Teniendo en cuenta que la señal de salida $y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\lambda)h(t - \lambda) d\lambda$ y aplicando el teorema de convolución de la transformada de Fourier, se puede obtener la siguiente relación,

$$H(\omega) = \frac{Y(\omega)}{X(\omega)},$$

siendo $Y(\omega) = \mathcal{F}\{y(t)\}$ y $X(\omega) = \mathcal{F}\{x(t)\}$.

1.3. Procesos aleatorios

Según como se la definió en la sección anterior, la función de transferencia es una función determinista y es propia del sistema al que está representando. En este trabajo se pretende realizar una representación del *clutter* en los sistemas de radar biestático a través de una función de transferencia, por lo que es necesario considerar que la misma no será una función determinista, ya que el *clutter* está compuesto por muchos elementos que poseen características aleatorias, como su sección eficaz o su posición.

Aquellas funciones que, además, dependen de una o más de una variable aleatoria se denominan “procesos aleatorios” o “procesos estocásticos” [13]. En el caso de la función de transferencia, además de depender de ω , depende de las múltiples variables presentes en el *clutter*.

Con esta idea, se puede definir $X(t, \zeta)$ como un proceso que es una función de t cuya variable aleatoria es ζ . Fijado $\zeta = \zeta_0$, X es simplemente una función de t . Cada $X(t, \zeta_0)$ se denomina realización.

Para definir probabilísticamente al proceso $X(t, \zeta)$ de manera completa, no basta sólo con conocer la densidad de probabilidad de $X(t_0, \zeta)$ para todo t_0 , ya que para dos t distintos puede existir alguna dependencia estadística. Si el espacio de la variable t es numerable, la manera de definir completamente al proceso $X(t, \zeta)$ es a través de la distribución de probabilidad conjunta de todos los t posibles. En caso contrario, el proceso $X(t, \zeta)$ puede definirse parcialmente a través de su densidad de probabilidad de $X(t_0, \zeta)$, para todo t_0 , o a través de otros parámetros como los momentos o funciones de ellos [13]. En el presente trabajo se analiza la función de transferencia a través de la esperanza, la autocorrelación y la varianza.

1.3.1. Esperanza, autocorrelación y varianza

La esperanza del proceso $X(t, \zeta)$ es una función de t y se define como

$$\mathbb{E}[X(t)] = \int_{\mathbb{C}} x f_{X(t)}(x) dx,$$

siendo $f_{X(t)}(x)$ la distribución de probabilidad de $X(t, \zeta)$. La esperanza representa la tendencia que tiene el proceso X en función de t .

La varianza de un proceso $X(t, \zeta)$ es una función de t y se define como

$$\mathbb{V}[X(t)] = \mathbb{E}[|X(t) - \mathbb{E}[X(t)]|^2] = \int_{\mathbb{C}} |x - \mathbb{E}[X(t)]|^2 f_{X(t)}(x) dx.$$

La varianza indica cuán disperso es el valor de $X(t, \zeta)$ para un determinado t . La raíz cuadrada de la varianza se denomina desviación estándar.

La autocorrelación de un proceso $X(t, \zeta)$ es una función de dos variables y se define como

$$\mathbb{E}[X(t_1)X^*(t_2)] = \int_{\mathbb{C}} \int_{\mathbb{C}} x_1 x_2^* f_{X(t_1), X(t_2)}(x_1, x_2) dx_1 dx_2,$$

siendo $f_{X(t_1), X(t_2)}(x_1, x_2)$ la distribución de probabilidad conjunta de $X(t_1)$ y $X(t_2)$. Notar que la autocorrelación, cuando $t_1 = t_2 = t$, coincide con la varianza más el módulo cuadrado de la esperanza. En general, la autocorrelación es una función de t_1 y t_2 , pero cuando sólo es una función de $\Delta t = t_2 - t_1$ y tiene esperanza nula, se dice que el proceso es “estacionario en sentido amplio”. Ante esta condición, la varianza resulta independiente de t .

En este trabajo, la señal transmitida sufre reflexiones en el *clutter*, provocando contribuciones en la señal recibida, con lo cual se define una función de transferencia, y esta transferencia es el proceso estocástico que se analiza en función de distintas características aleatorias del *clutter*, a través de la esperanza, la autocorrelación y la varianza. La suma entre la varianza y el módulo al cuadrado de la esperanza de la función de transferencia, da una medida cuantitativa de cuánta potencia se transmite a través de reflexiones en el *clutter*.

Capítulo 2

Propagación y función de transferencia

En este capítulo se introducen modelos de propagación y reflexión que fueron utilizados para llevar a cabo el análisis de los procesos estocásticos que intervienen en un radar biestático, y una explicación detallada sobre las principales funciones y definiciones empleadas para llevar a cabo el trabajo, como la distribución de reflectores $\rho(\mu)$ y la función de transferencia $\tau(\omega)$.

2.1. Modelos de propagación

En este trabajo se utilizó el modelo de propagación en el espacio libre para modelar la propagación de una onda electromagnética en el espacio. Dicho modelo se utiliza en diversas aplicaciones donde las características del medio no difieren mucho de la del espacio libre, como por ejemplo en medios homogéneos, donde no existen obstáculos que interfieran en la propagación de la onda.

Como se indica en la figura 2.1, el modelo de propagación de espacio libre asume la existencia de una fuente (en este caso, la antena transmisora) que emite una onda desde un punto (en este caso, el centro de fases de la antena) que se propaga en todas las direcciones a través del medio (en este caso, el aire) con una determinada velocidad (en este caso, se considera que viaja a la velocidad de la luz en el vacío), con una amplitud inversamente proporcional a la distancia recorrida.

Si la señal que emite la antena transmisora está descrita por una función temporal $x(t)$, entonces, según el modelo en cuestión, la señal que se medirá en un punto alejado una distancia r de la antena transmisora será $y(t) = x(t - r/c)/r$ [14], siendo c la velocidad de la luz en el vacío. Cabe aclarar que, si bien $x(t)$ e $y(t)$ tienen distintas unidades, ambas son proporcionales a la amplitud de la onda electromagnética.

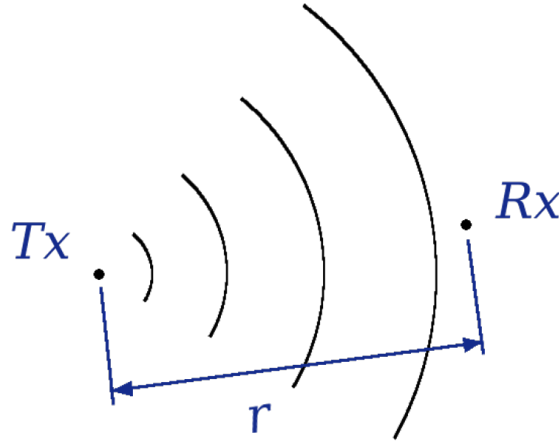


Figura 2.1: Esquema de propagación de una onda en el espacio libre, Tx representa la posición de la antena transmisora y Rx es algún punto en el espacio donde se recibe la onda, con una separación de r .

2.2. Modelos de reflexión

Cuando una onda se propaga en un medio y se encuentra con un determinado obstáculo, sufre una reflexión. Las características de la onda reflejada pueden variar según la frecuencia de onda original, su velocidad, su amplitud máxima, y también según las características del objeto, como sus dimensiones y sus propiedades electromagnéticas.

El modelo utilizado en este trabajo para caracterizar las reflexiones fue el modelo de reflector puntual. Este modelo se puede utilizar cuando el objeto reflejante posee dimensiones pequeñas comparadas con la longitud de onda o cuando la reflexión es difusa [15]. Si el objeto está fijo, la onda reflejada tiene la misma frecuencia que la original y se propaga como si hubiera una nueva fuente puntual (ubicada en el objeto) con el modelo de propagación de espacio libre. Además, la onda reflejada posee una potencia menor que la original. Esta disminución de potencia es propia de las características del objeto, se denomina “sección eficaz” y se simboliza con la letra σ . El esquema de este modelo se indica en la figura 2.2.

Si la onda original está definida por la señal $x(t)$, la onda reflejada, según el modelo a utilizar, queda descrita por la señal $y(t) = \sqrt{\sigma}x(t)$, y esta nueva onda se propaga como si tuviera una fuente puntual en el objeto. Se ha considerado que la pérdida de amplitud por reflexión de una señal es igual a la raíz de la sección eficaz, ya que la sección eficaz representa la pérdida de potencia por reflexión. Nuevamente, si bien $x(t)$ e $y(t)$ tienen distintas unidades, ambas son proporcionales a la amplitud de la onda electromagnética.

Cabe aclarar que este modelo no considera la dependencia de la sección eficaz de los objetos con la frecuencia de la onda, fenómeno que en la realidad sucede. Sin embargo,

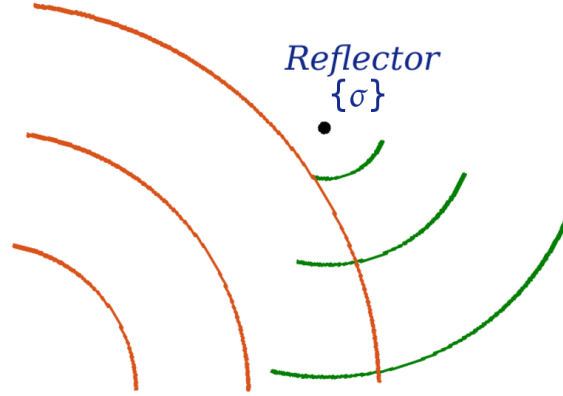


Figura 2.2: Esquema de reflexión de una onda en un objeto reflector puntual. La onda incidente está representada con arcos de circunferencia de color anaranjado, mientras que la reflejada, de color verde. σ es la sección eficaz del objeto reflector, que indica la pérdida de potencia de la onda al reflejarse.

si el análisis se enfoca en una determinada frecuencia o en una banda de frecuencias en el que la sección eficaz no varía demasiado, puede asumirse como una constante. Sin embargo, cuando la banda de frecuencias cubre un rango más extenso, la sección eficaz deja de ser independiente de la frecuencia y debe considerarse esta variación en función de la frecuencia. En el presente trabajo los análisis se realizan sobre una determinada frecuencia, por ejemplo, la función de transferencia, que se define en la siguiente sección, se calcula frecuencia por frecuencia y no se correlacionan entre ellas.

2.3. Configuración biestática con reflectores puntuales y función de transferencia

En los sistemas de radar biestático, la antena transmisora y la antena receptora no se encuentran en el mismo lugar espacial, sino que están separadas por la línea base o *baseline*. Considerando los dos modelos mencionados anteriormente, la señal puede viajar desde la transmisora a la receptora por línea directa (línea de vista o *line of sight*) o a través de reflexiones en objetos puntuales (multicamino o *multiple path*) [16].

Considerando un escenario biestático como el indicado en la figura 2.3, con la antena transmisora situada en \mathbf{r}_T y la receptora en \mathbf{r}_R , con N objetos puntuales situados en \mathbf{r}_i y con secciones eficaces σ_i , y teniendo en cuenta los modelos de propagación de espacio libre y de reflector puntual, se puede modelar a la señal recibida por la antena receptora

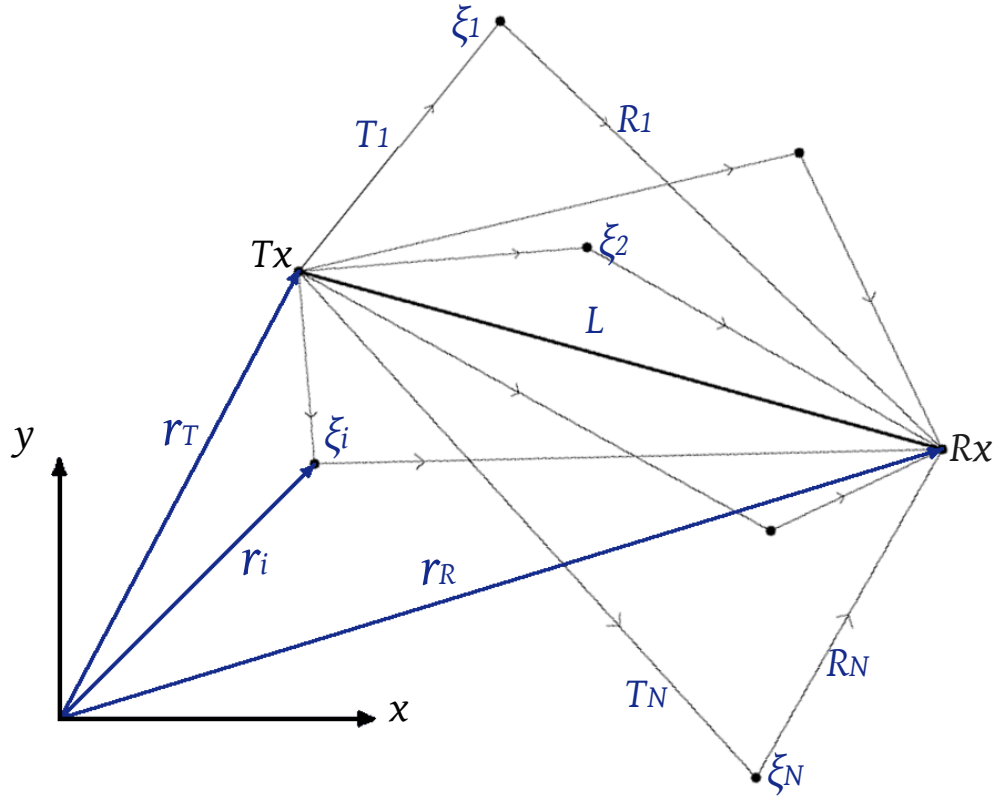


Figura 2.3: Esquema de múltiples reflexiones en un sistema biestático. Tx representa a la antena transmisora y Rx a la receptora, mientras que ξ_i representa a la raíz cuadrada de la sección eficaz σ_i del i ésimo reflector.

como la compuesta por la línea de vista y las múltiples reflexiones en los objetos [17],

$$y(t) = \frac{x(t - L/c)}{L} + \sum_{i=1}^N \frac{\xi_i x(t - (T_i + R_i)/c)}{T_i R_i}, \quad (2.1)$$

donde $L = |\mathbf{r}_T - \mathbf{r}_R|$, $T_i, R_i = |\mathbf{r}_{T,R} - \mathbf{r}_i|$ y $\xi_i = \sqrt{\sigma_i}$.

La ecuación 2.1 modela a la señal recibida en la antena receptora de un radar biestático real con las idealizaciones mencionadas en las secciones 2.1 y 2.2. Aunque en la realidad existen además otros fenómenos de distintos orígenes, como la difracción, la refracción atmosférica, dispersión por la no linealidad del medio, reflexión especular, etcétera, se optó por utilizar sólo estas idealizaciones en la mayor parte de este trabajo. Sin embargo, distintos modelos empíricos son utilizados más adelante para tener en cuenta los fenómenos mencionados.

Considerando un escenario biestático con reflectores puntuales y modelando la señal en la antena receptora como establece la ecuación 2.1, queda establecido un sistema lineal e invariante en el tiempo (siempre que los objetos estén quietos). Por lo tanto, es natural [12] definir a la función de transferencia del sistema como $H(\omega) = Y(\omega)/X(\omega)$, siendo $X(\omega)$ e $Y(\omega)$ las transformadas de Fourier de las señales $x(t)$ e $y(t)$, respectiva-

mente. $H(\omega)$ está compuesta por el rayo directo y por las múltiples reflexiones. En este trabajo, sin embargo, no llamaremos función de transferencia a $H(\omega)$, sino que reservaremos este nombre para la función $\tau(\omega)$, que es la componente de $H(\omega)$ que representa a las reflexiones en los objetos reflectores, y se define en la ecuación 2.3. De 2.1 se puede deducir, aplicando la transformada de Fourier y acomodando convenientemente:

$$H(\omega) = \frac{e^{j\omega L/c}}{L} (1 + \tau(\omega)), \quad (2.2)$$

donde las múltiples reflexiones se comprimen en la definición de $\tau(\omega)$, como se indica en la ecuación 2.3.

$$\tau(\omega) = \sum_{i=1}^N \frac{\xi_i L}{T_i R_i} e^{j\omega L/c(1 - \frac{T_i + R_i}{L})} = \sum_{i=1}^N \mathcal{T}(\mathbf{r}_i, \omega). \quad (2.3)$$

Como se mencionó anteriormente, la función $\tau(\omega)$ representa a las reflexiones en los objetos puntuales y es lo que llamaremos en este trabajo como “función de transferencia”.

En el caso de los radares biestáticos, el clutter puede modelarse como reflectores puntuales que generan diversas reflexiones en cada objeto individual que lo compone. Por ejemplo, el caso de un bosque que está compuesto por una gran cantidad de árboles que pueden ser representadas por objetos puntuales de una determinada sección eficaz. Lo mismo sucede en el caso de una nube, o simplemente algún conjunto de objetos de dimensiones pequeñas respecto de la longitud de onda.

Es importante notar en la ecuación 2.3 que cada reflector puntual actúa de manera independiente respecto de los otros, es decir, la función de transferencia queda compuesta por una superposición lineal de cada una de las componentes $\mathcal{T}(\mathbf{r}_i, \omega)$. Esta característica del modelo planteado permite lograr una gran versatilidad para cualquier escenario.

2.3.1. Aproximación a distribución continua de reflectores

Para dar un paso adelante sobre el planteo de la función de transferencia, se puede representar a los reflectores discretos como una densidad continua de reflectores [17], en donde entra en juego la cantidad de reflectores por unidad de área o volumen, según corresponda. En esta instancia se analiza el caso en que los reflectores están ubicados en un plano, al que también pertenecen las antenas transmisora y receptora. Por lo tanto, la ecuación 2.3 puede convertirse en una integral de la siguiente forma

$$\tau(\omega) = \int_{\mathbb{R}^2} n(\mathbf{r}) \frac{\xi L}{TR} e^{j\omega L/c(1 - \frac{T+R}{L})} d^2\mathbf{r} = \int_{\mathbb{R}^2} n(\mathbf{r}) \mathcal{T}(\mathbf{r}, \omega) d^2\mathbf{r}, \quad (2.4)$$

donde se ha introducido $n(\mathbf{r})d^2\mathbf{r}$ como la cantidad de reflectores ubicados en el elemento de superficie $d^2\mathbf{r}$. La función $n(\mathbf{r})$ representa a la densidad de reflectores por unidad de área y, por lo tanto, cumple que

$$\int_{\mathbb{R}^2} n(\mathbf{r})d^2\mathbf{r} = N. \quad (2.5)$$

La ecuación 2.4 representa, entonces, la función de transferencia considerando una densidad continua de reflectores. Este camino permite hacer un análisis detallado de la función de transferencia mediante la utilización de funciones analíticas en 2.4 que permitan obtener resultados exactos. Este análisis se facilita enormemente si se introduce un sistema de coordenadas elípticas, donde los focos coinciden con las posiciones de las antenas transmisora y receptora, como se indica en la figura 2.4. En el apéndice A se detallan las principales propiedades utilizadas en esta sección del sistema de coordenadas elípticas.

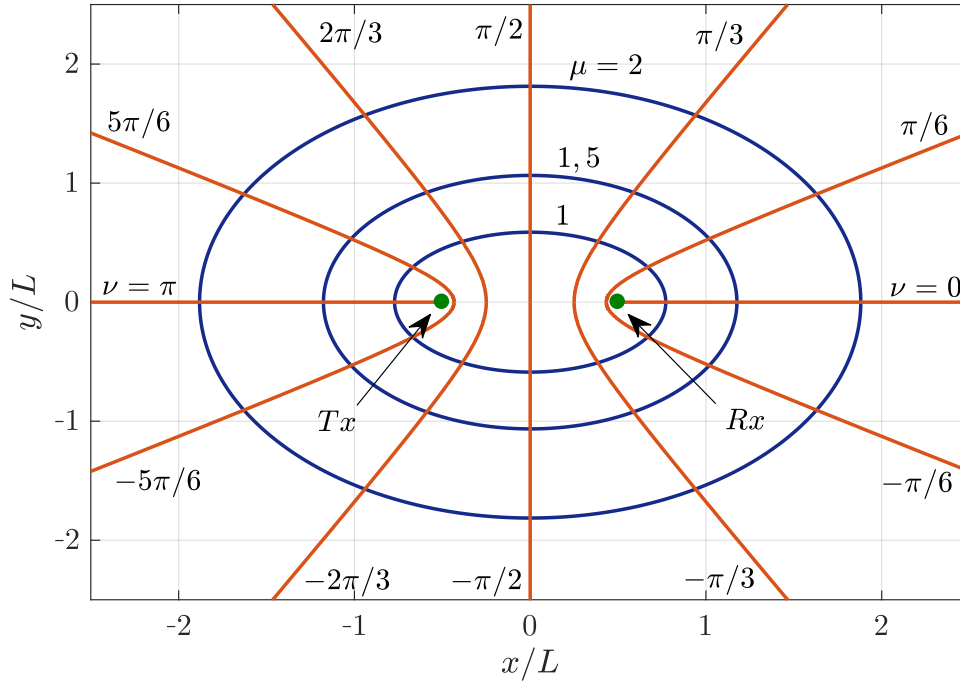


Figura 2.4: Sistema de coordenadas elípticas con focos coincidentes con las posiciones de las antenas transmisora y receptora, estando separadas una distancia L . En azul, curvas de μ constante, y en anaranjado, curvas de ν constante.

La suma de las distancias T y R es una constante para todos los puntos situados en una elipse, es decir, para μ constante, y se denominan puntos “isorrango”. Además, se cumple que $T + R = L \cosh \mu$. En un sistema de coordenadas elípticas, el elemento $d^2\mathbf{r}$ se convierte en $J(\mu, \nu) d\mu d\nu$, siendo $J(\mu, \nu) = (L/2)^2(\cosh^2 \mu - \cos^2 \nu)$ el determinante del jacobiano del cambio de variables. El producto de las distancias T y R , coincidentemente, es igual al determinante del jacobiano del cambio de variables, es

decir, $TR = (L/2)^2(\cosh^2 \mu - \cos^2 \nu) = J(\mu, \nu)$. Teniendo en cuenta estas equivalencias, la función $\mathcal{T}(\mu, \nu, \omega)$ (expresada en coordenadas elípticas) se convierte en

$$\mathcal{T}(\mu, \nu, \omega) = \frac{\xi(\mu, \nu) L e^{j\omega L/c(1-\cosh \mu)}}{(L/2)^2(\cosh^2 \mu - \cos^2 \nu)}, \quad (2.6)$$

mientras que la ecuación 2.4 se convierte en

$$\begin{aligned} \tau(\omega) &= \int_0^\infty \int_0^{2\pi} n(\mu, \nu) (L/2)^2 (\cosh^2 \mu - \cos^2 \nu) \mathcal{T}(\mu, \nu, \omega) d\mu d\nu \\ &= \int_0^\infty \int_0^{2\pi} n(\mu, \nu) \xi(\mu, \nu) L e^{j\omega L/c(1-\cosh \mu)} d\mu d\nu. \end{aligned} \quad (2.7)$$

En la ecuación 2.7 queda expresado el producto $n(\mu, \nu)\xi(\mu, \nu)$ que representa a la densidad de reflectores pesada por la raíz de la sección eficaz. Este producto puede fusionarse en una sola función $\rho(\mu, \nu) = n(\mu, \nu)\xi(\mu, \nu)$. La función de transferencia en un sistema de radar biestático, entonces, depende únicamente de esta función.

Es necesario notar que la función de transferencia puede reducirse a una integral única en la variable μ introduciendo a la función $\rho(\mu) = \int_0^{2\pi} \rho(\mu, \nu) d\nu$ que se denominará “distribución de reflectores”. Esta simplificación no significa más que agrupar todos los reflectores ubicados sobre la misma elipse y compactarlos en un sólo término. Esto es natural en el caso de un radar biestático, ya que a la antena receptora, en un determinado momento, llegan los ecos producidos por todas las reflexiones sobre una misma elipse, y es por ello que las elipses son curvas isorrango. Sin embargo, la antena receptora no puede distinguir desde qué dirección provinieron esos ecos. Introduciendo este concepto, la función de transferencia resulta

$$\tau(\omega) = \int_0^\infty L \rho(\mu) e^{j\omega L/c(1-\cosh \mu)} d\mu. \quad (2.8)$$

La función de transferencia puede calcularse de manera analítica para determinadas distribuciones $\rho(\mu)$, lo cual se presenta en la siguiente sección.

2.3.2. Función de transferencia para determinadas distribuciones de reflectores

En la sección anterior se dedujo una relación entre la función de transferencia y la distribución de reflectores en un sistema biestático plano. En esta sección se presentan resultados analíticos de la función de transferencia para determinadas distribuciones de reflectores. En la tabla 2.1 se presentan algunos casos, y las funciones de transferen-

cia correspondientes son graficadas en la figura 2.5. En los siguientes capítulos, estos resultados serán verificados mediante simulaciones de un escenario biestático plano.

$\rho(\mu)/\rho_0$	$\tau(\omega)/L\rho_0$
$e^{\alpha(1-\cosh \mu)}$	$e^u K_0(u)$
$\sinh^2(\mu)e^{\alpha(1-\cosh \mu)}$	$e^u K_1(u)/u$
$\sinh^2(\mu) \cosh^2(\mu)e^{\alpha(1-\cosh \mu)}$	$e^u(uK_1(u) + 3K_2(u))/u^2$
$\sinh^4(\mu) \cosh^2(\mu)e^{\alpha(1-\cosh \mu)}$	$e^u(3uK_2(u) + 15K_3(u))/u^3$

Tabla 2.1: Función de transferencia para distintas distribuciones de reflectores, donde se ha definido $u = \alpha + j\omega L/c$. Las funciones $K_n(\cdot)$ son funciones de Bessel modificadas de segundo tipo, de orden n .

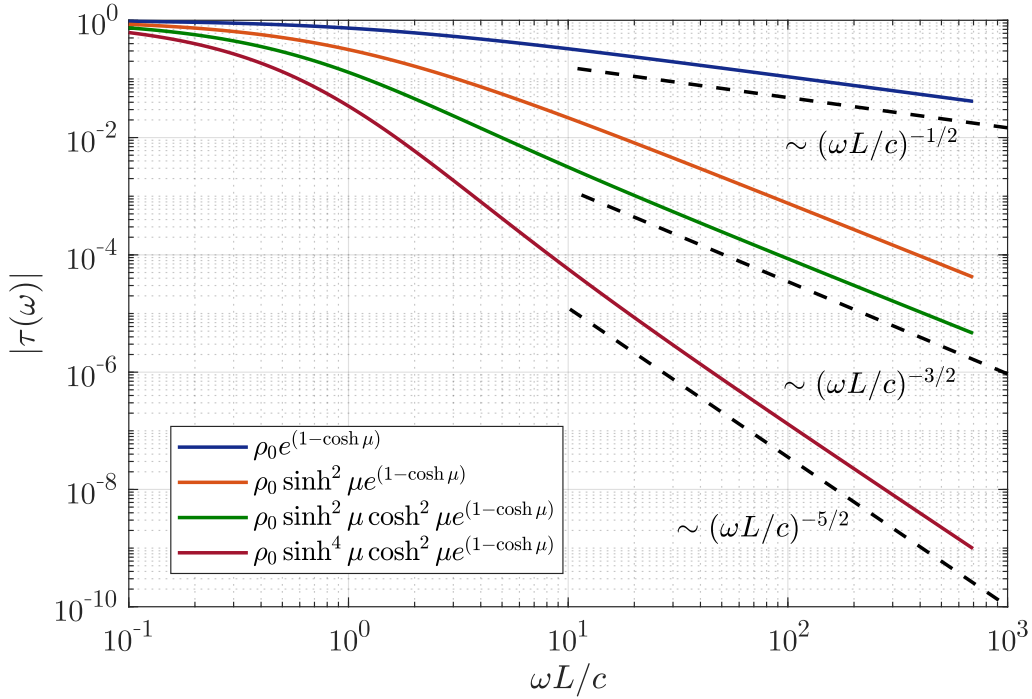


Figura 2.5: Función de transferencia para las distribuciones de reflectores $\rho(\mu)$ listadas en la tabla 2.1, normalizadas a su valor máximo.

Se puede ver que, cuando $\omega L/c \gtrsim 10$, las funciones de transferencia adquieren una pendiente constante (en escalas logarítmicas). Este comportamiento puede explicarse aproximando la ecuación 2.8 con $\omega L/c \rightarrow \infty$, donde la función de transferencia se comporta [17] como

$$\tau(\omega) \approx k_0 \rho(0)(\omega L/c)^{-1/2} + k_1 \rho'(0)(\omega L/c)^{-1} + k_2 \rho''(0)(\omega L/c)^{-3/2} + \dots,$$

siendo k_0, k_1, k_2, \dots constantes complejas e independientes de $\omega L/c$.

En la primera de las distribuciones de la tabla 2.1 $\tau(\omega) \sim (\omega L/c)^{-1/2}$ con $\omega L/c \rightarrow \infty$, que es el comportamiento que establece la aproximación. Sin embargo, en la segunda y tercera distribución, $\tau(\omega) \sim (\omega L/c)^{-3/2}$, lo cual se debe a que $\rho(0) = \rho'(0) = 0$, por

lo tanto se anulan los primeros términos de la aproximación. En la cuarta distribución, $\tau(\omega) \sim (\omega L/c)^{-5/2}$ porque los cuatro primeros términos de la aproximación se anulan.

Las distribuciones de la tabla 2.1 no fueron elegidas para representar algún escenario real, sino más bien para poder facilitar los análisis que se presentan en los siguientes capítulos. Sin embargo, la primera de las distribuciones puede representar un escenario real en el que la cantidad de reflectores va disminuyendo exponencialmente como $n(\mathbf{r}) \sim e^{(-2\alpha|\mathbf{r}|/L)}$ para $\mathbf{r} \gg 1$, siendo α la constante de decaimiento [17].

Capítulo 3

Cálculo numérico de la función de transferencia

En el capítulo anterior se introdujo el concepto de función de transferencia en un sistema biestático con múltiples reflectores puntuales y también con una densidad continua de reflectores. Se derivó una expresión explícita entre la función de transferencia y la densidad continua de reflectores, expresando resultados analíticos de esta función para ciertas distribuciones de reflectores. En este capítulo se presentan verificaciones de estos resultados mediante simulaciones.

Para poner en ejecución el modelo, se planteó un escenario con las antenas transmisora y receptora, y se colocaron reflectores puntuales en otras posiciones. Es necesario resaltar que los resultados analíticos de la función de transferencia mostrados en el capítulo anterior fueron obtenidos para distribuciones continuas de reflectores, mientras que, en el problema planteado a través de simulaciones, necesariamente se debe trabajar con reflectores puntuales. Esta diferencia anticipa que los resultados obtenidos en las simulaciones no serán exactamente iguales a los obtenidos analíticamente.

3.1. Generación del escenario con reflectores

Una de las formas de generar las coordenadas de los reflectores en el plano, es plantear un grillado (cartesiano o no) regular plano y dar valores de sección eficaz según la distribución de reflectores que se quiera representar. Otro método es, dando una sección eficaz constante a todos los reflectores, generar posiciones de reflectores de acuerdo a una distribución de probabilidad que represente a la distribución de reflectores. En este capítulo se analiza cómo es afectada estadísticamente la función de transferencia utilizando este último método.

3.1.1. Generación aleatoria de las coordenadas de los reflectores

Una de las formas más naturales de generar posiciones de reflectores en el plano es utilizando una distribución de probabilidad que represente a la distribución de reflectores. Este método es también conocido como método de Monte Carlo, donde se muestrea el integrando de 2.8. Ahora bien, los puntos en cuestión son ¿cuáles son las distribuciones de probabilidad que representan a las distribuciones de reflectores?, ¿hay una solución única?

A continuación se presenta una forma de obtener la distribución de probabilidad y cómo se simplifica cuando se expresa en coordenadas elípticas, de manera análoga a cómo sucede con la distribución de reflectores.

Partiendo de la definición de la densidad de reflectores en la ecuación 2.5,

$$\int_{\mathbb{R}^2} n(\mathbf{r}) d^2 \mathbf{r} = N,$$

se puede definir la siguiente relación

$$\begin{aligned} N\eta(\mu, \nu) d\mu d\nu &= n(\mathbf{r}) d^2 \mathbf{r} \\ N\eta(\mu, \nu) d\mu d\nu &= n(\mu, \nu) (L/2)^2 (\cosh^2 \mu - \cos^2 \nu) d\mu d\nu. \end{aligned} \tag{3.1}$$

Notar que $N\eta(\mu, \nu)$ es la función de peso con la que se calcula la integral de $\mathcal{T}(\omega)$ para obtener $\tau(\omega)$ (2.7). Por lo tanto, $\eta(\mu, \nu)$ es, en sí, la distribución de probabilidad conjunta en el espacio (μ, ν) con que se deben generar las coordenadas de los reflectores. Además, se puede ver fácilmente que cumple con la propiedad de normalización,

$$\int_0^\infty \int_0^{2\pi} \eta(\mu, \nu) d\mu d\nu = 1.$$

Supongamos que $\xi(\mu, \nu)$ es constante para todo el espacio e igual a ξ_0 . Si el sorteo de las coordenadas μ es independiente del sorteo de las coordenadas ν , entonces la distribución de probabilidad conjunta es el producto de las marginales. Y si, además, la distribución es uniforme en ν , entonces $\eta(\mu, \nu) = \eta(\mu)/2\pi$. Teniendo en cuenta la definición de la distribución de reflectores,

$$\rho(\mu) = \int_0^{2\pi} \xi(\mu, \nu) n(\mu, \nu) d\mu d\nu = \int_0^{2\pi} \xi_0 n(\mu, \nu) d\mu d\nu,$$

y la definición en 3.1, se puede establecer una relación directa entre $\rho(\mu)$ y $\eta(\mu)$,

$$\rho(\mu) = \int_0^{2\pi} \frac{N\xi_0}{(L/2)^2} \frac{\eta(\mu)/2\pi}{\cosh^2 \mu - \cos^2 \nu} d\nu = \frac{N\xi_0}{(L/2)^2} \frac{\eta(\mu)}{\cosh \mu \sinh \mu}. \quad (3.2)$$

Se puede ver que, dada una densidad de reflectores $\rho(\mu)$, existe una relación con la densidad de probabilidad $\eta(\mu)$ con la que se deben generar las coordenadas μ de los reflectores. Sin embargo, la densidad de probabilidad $\eta(\mu)$ no es única, ya que se asumió isotropía en la variable ν , pero para densidades de probabilidad no uniformes en ν , el resultado en 3.2 será distinto. En este trabajo sólo nos enfocaremos en aquellas donde se cumple isotropía en la variable ν .

Es necesario notar que la función de transferencia es un proceso aleatorio porque depende de las posiciones aleatorias de los reflectores. Por lo tanto, en cada simulación el cálculo de la función de transferencia será una realización distinta. En el capítulo siguiente se analizará detalladamente cómo se comporta este proceso y su relación con la función de transferencia calculada analíticamente, es decir, con la distribución continua de reflectores.

3.2. Propiedades estadísticas de la función de transferencia

En la sección anterior se mencionó que, si las coordenadas de los reflectores se generan como variables aleatorias con una distribución de probabilidad $\eta(\mu, \nu)$, entonces la función de transferencia es un proceso aleatorio en ω . En esta sección se hace un análisis estadístico de este proceso y cómo se vincula con la función de transferencia analítica.

La función de transferencia, como cualquier proceso estocástico, queda totalmente caracterizada por una distribución de probabilidad en función de ω . Esta distribución de probabilidad depende únicamente de la distribución de probabilidad $\eta(\mu, \nu)$ con que se distribuyen los reflectores. Sin embargo, pasar de una distribución de probabilidad a otra es matemáticamente complicado. Otra forma de caracterizar los procesos es a través de parámetros estadísticos, como los momentos. Los parámetros estadísticos que se analizan en este capítulo y en los siguientes son la esperanza y la varianza.

Los parámetros estadísticos mencionados se pueden obtener a partir de la definición de la función de transferencia en la ecuación 2.3,

$$\tau(\omega) = \sum_{i=1}^N \mathcal{T}(\mathbf{r}_i, \omega).$$

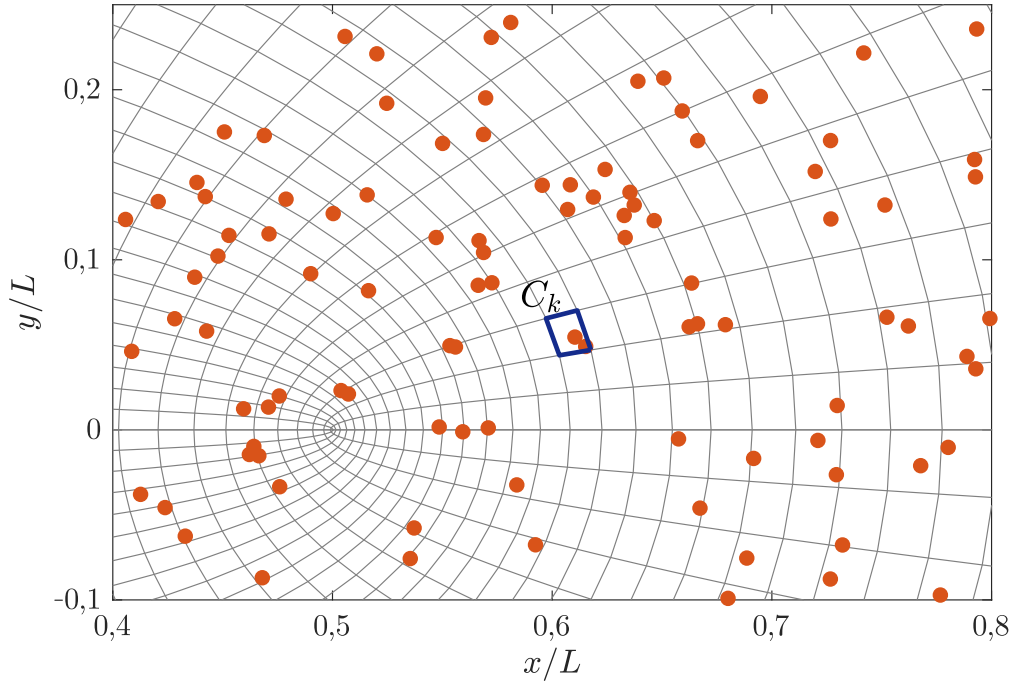


Figura 3.1: Grillado regular en las coordenadas elípticas, representado en el espacio cartesiano, con reflectores dispuestos de manera aleatoria y representados con puntos. Se resalta la celda C_k , con una cantidad de reflectores aleatoria.

Considerando un grillado regular en (μ, ν) , como se muestra en la figura 3.1, se pueden agrupar los reflectores de cada celda de la grilla. Definiendo I_k como el conjunto de i es tal que sus correspondientes reflectores se ubican dentro de los límites de la celda C_k , mostrada en la misma figura, podemos reescribir la sumatoria agrupando los términos correspondientes a las mismas celdas como

$$\tau(\omega) = \sum_{I_k} \left(\sum_{i \in I_k} \mathcal{T}(\mathbf{r}_i, \omega) \right).$$

Asumiendo que $\bar{\mathcal{T}}(\mathbf{r}_k, \omega)$ es el promedio de los $\mathcal{T}(\mathbf{r}_i, \omega)$ dentro de la celda C_k , se puede obtener

$$\tau(\omega) = \sum_{C_k} N_k \bar{\mathcal{T}}(\mathbf{r}_k, \omega), \quad (3.3)$$

donde N_k es la cantidad de reflectores en C_k y se cumple que $\sum_k N_k = N$. A raíz de este análisis, queda definido el conjunto N_1, N_2, \dots , que representa a las cantidades de reflectores presentes en las celdas C_1, C_2, \dots , y que tiene una distribución multinomial [18] cuando se generan las coordenadas de los reflectores de la simulación, con parámetros $p_1 = \int_{C_1} \eta(\mu, \nu) d\mu d\nu$, $p_2 = \int_{C_2} \eta(\mu, \nu) d\mu d\nu$, Por lo tanto, la probabilidad conjunta queda definida como

$$\mathbf{P}[N_1, N_2, \dots] = \frac{N!}{N_1! N_2! \dots} p_1^{N_1} p_2^{N_2} \dots$$

Por propiedades de la distribución multinomial, la esperanza y la autocorrelación de los N_k son $\mathbf{E}[N_k] = Np_k$ y $\mathbf{E}[N_k N_{k'}] = Np_k(\delta_{kk'} + p_{k'}(N-1))$. De estas propiedades pueden calcularse la esperanza y la autocorrelación de la función de transferencia en la ecuación 3.3 como

$$\mathbf{E}[\tau(\omega)] = \sum_{C_k} \mathbf{E}[N_k] \bar{\mathcal{T}}(\mathbf{r}_k, \omega) = \sum_{C_k} Np_k \bar{\mathcal{T}}(\mathbf{r}_k, \omega) \quad (3.4)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{E}[\tau(\omega_1)\tau^*(\omega_2)] &= \sum_{C_k} \sum_{C_{k'}} \mathbf{E}[N_k N_{k'}] \bar{\mathcal{T}}(\mathbf{r}_k, \omega_1) \bar{\mathcal{T}}^*(\mathbf{r}_{k'}, \omega_2) \\ &= \sum_{C_k} \sum_{C_{k'}} Np_k(\delta_{kk'} + p_{k'}(N-1)) \bar{\mathcal{T}}(\mathbf{r}_k, \omega_1) \bar{\mathcal{T}}^*(\mathbf{r}_{k'}, \omega_2) \\ &= \sum_{C_k} Np_k \bar{\mathcal{T}}(\mathbf{r}_k, \omega_1) \bar{\mathcal{T}}^*(\mathbf{r}_k, \omega_2) + \frac{N-1}{N} \mathbf{E}[\tau(\omega_1)] \mathbf{E}[\tau^*(\omega_2)]. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Hasta este punto se utilizó un grillado regular en el espacio (μ, ν) , pero no se dijo nada acerca de las dimensiones de este grillado. Sin embargo, la idea de hacer el análisis a través de un grillado es poder hacer tender el tamaño de cada celda a cero y poder analizar el espacio como un continuo. En ese sentido, si se hace tender a cero el tamaño de la celda, se pueden aproximar las probabilidades $p_k \approx \eta(\mu_k, \nu_k) d\mu d\nu$, donde μ_k y ν_k son los valores de las coordenadas μ y ν en la celda C_k . Además, las sumatorias de 3.4 y 3.5 pueden aproximarse a integrales en el espacio (μ, ν) como

$$\mathbf{E}[\tau(\omega)] = \int_0^\infty \int_0^{2\pi} N\eta(\mu, \nu) \mathcal{T}(\mu, \nu, \omega) d\mu d\nu \quad (3.6)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{E}[\tau(\omega_1)\tau^*(\omega_2)] - \frac{N-1}{N} \mathbf{E}[\tau(\omega_1)] \mathbf{E}[\tau^*(\omega_2)] &= \\ &= \int_0^\infty \int_0^{2\pi} N\eta(\mu, \nu) \mathcal{T}(\mu, \nu, \omega_1) \mathcal{T}^*(\mu, \nu, \omega_2) d\mu d\nu. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Es necesario notar que la esperanza de la función de transferencia en un escenario con reflectores con coordenadas generadas con la distribución $\eta(\mu, \nu)$ coincide exactamente con la función de transferencia analítica según la ecuación 2.7, sabiendo la relación (3.1) $N\eta(\mu, \nu) = n(\mu, \nu)(L/2)^2(\cosh^2 \mu - \cos^2 \nu)$. En otras palabras, si se cumple esta relación, la función de transferencia como proceso estocástico es insesgado respecto de la función de transferencia analítica.

Por otro lado, en la ecuación 3.7 puede verse que, si N es grande, el miembro de la izquierda se aproxima a la covarianza y que, además, crece proporcional a N . Esta dependencia podía haberse anticipado sabiendo que la función de transferencia es la sumatoria de las contribuciones de muchos reflectores de posiciones independientes e

igualmente distribuidas, aplicando el teorema central del límite el comportamiento de la (co)varianza es proporcional al número de reflectores.

Si $\omega_1 = \omega_2 = \omega$, de la covarianza se obtiene la varianza de la función de transferencia

$$\mathbf{V}[\tau(\omega)] \approx N \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \eta(\mu, \nu) |\mathcal{T}(\mu, \nu, \omega)|^2 d\mu d\nu.$$

Se puede anticipar que la varianza de la función de transferencia es independiente de la frecuencia.

3.3. Comparación entre resultados analíticos y simulaciones numéricas

En esta sección se busca verificar los resultados estadísticos obtenidos en la sección anterior sobre la función de transferencia como un proceso estadístico. Para ello, se realizó una serie de simulaciones con distintas distribuciones de probabilidad para generar las coordenadas de reflectores colocados en el mismo plano que las antenas transmisora y receptora. Con motivo de poder comparar los resultados de las simulaciones con los resultados obtenidos, se trabajó con distribuciones de probabilidad $\eta(\mu, \nu)$ tales que las integrales de la esperanza y la varianza pudieran ser calculadas.

En todos los casos, se decidió trabajar con una distribución de probabilidad “isotrópica”, es decir, independiente de la variable angular ν , por lo que $\eta(\mu, \nu) = \eta(\mu)/2\pi$ y con raíz de sección eficaz constante e igual a ξ_0 . Con estas condiciones, la esperanza y la varianza de la función de transferencia pueden simplificarse significativamente.

Reemplazando $\mathcal{T}(\mu, \nu, \omega) = \frac{\xi_0 L e^{j\omega L/c(1-\cosh \mu)}}{(L/2)^2 (\cosh^2 \mu - \cos^2 \nu)}$, y $\eta(\mu, \nu) = \eta(\mu)/2\pi$, se puede obtener que la esperanza y la varianza son

$$\begin{aligned} \mathbf{E}[\tau(\omega)] &= \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \frac{N \xi_0 L}{(L/2)^2} \frac{\eta(\mu)}{2\pi} \frac{e^{j\omega L/c(1-\cosh \mu)}}{\cosh^2 \mu - \cos^2 \nu} d\mu d\nu \\ \mathbf{V}[\tau(\omega)] &\approx \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \frac{4N \xi_0^2}{(L/2)^2} \frac{\eta(\mu)/2\pi}{(\cosh^2 \mu - \cos^2 \nu)^2} d\mu d\nu. \end{aligned}$$

Al integrar en la variable ν , resulta que

$$\mathbf{E}[\tau(\omega)] = \frac{4N \xi_0}{L} \int_0^\infty \eta(\mu) \frac{e^{j\omega L/c(1-\cosh \mu)}}{\cosh \mu \sinh \mu} d\mu \quad (3.8)$$

$$\mathbf{V}[\tau(\omega)] \approx \frac{8N\xi_0^2}{L^2} \int_0^\infty \eta(\mu) \frac{2 \cosh^2 \mu - 1}{\cosh^3 \mu \sinh^3 \mu} d\mu. \quad (3.9)$$

Como se mencionó anteriormente, en las simulaciones numéricas se utilizaron distribuciones de probabilidad independientes de la variable ν . Y la distribución en la variable en μ , de la forma $\eta(\mu) = \eta_{a,b}(\mu) = C_{a,b,\alpha} e^{\alpha(1-\cosh \mu)} \sinh^a \mu \cosh^b \mu$, donde $C_{a,b,\alpha}$ es un coeficiente que normaliza la distribución de probabilidad.

Bajo estas condiciones, las integrales de las ecuaciones 3.8 y 3.9 pueden resolverse para ciertos casos. Teniendo en cuenta que para $\mu \rightarrow 0$, $\sinh \mu \approx \mu$, la integral en 3.8 converge si, con el mismo límite, $\eta(\mu) \sim \mu^\beta$, y la integral en 3.9, si $\eta(\mu) \sim \mu^{2+\beta}$, con $\beta > 0$. Este condicionamiento de convergencia surge a raíz de que los reflectores cercanos a las antenas transmisora o receptora ($\mu \approx 0$) proveen las mayores contribuciones a la función de transferencia y, por lo tanto, pequeñas variaciones en sus posiciones implican grandes fluctuaciones en $\tau(\omega)$.

En la tabla 3.1 se presentan soluciones analíticas de la esperanza y la varianza. Notar que estas distribuciones son las equivalentes a las $\rho(\mu)$ presentadas en la tabla 2.1, utilizando la relación 3.2.

$\eta(\mu)$	$\mathbf{E}[\tau(\omega)]L/2N\xi_0 C_{a,b,\alpha}$	$\mathbf{V}[\tau]L^2/8N\xi_0^2 C_{a,b,\alpha}$
$\eta_{1,1}(\mu)$	$e^u K_0(u)$	$\rightarrow \infty$
$\eta_{3,1}(\mu)$	$e^u K_1(u)/u$	$e^\alpha (c_1 + c_2 \alpha + \alpha \int K_2(\alpha) d\alpha - \int \alpha K_2(\alpha) d\alpha)$
$\eta_{3,3}(\mu)$	$e^u (uK_1(u) + 3K_2(u))/u^2$	$e^\alpha K_2(\alpha)$
$\eta_{5,3}(\mu)$	$e^u (3uK_2(u) + 15K_3(u))/u^3$	$e^\alpha \frac{\alpha K_1(\alpha) + 6K_2(\alpha)}{\alpha^2}$

Tabla 3.1: Esperanza y varianza de la función de transferencia para distintas densidades de probabilidad de generación de coordenadas de reflectores $\eta_{a,b}(\mu) = C_{a,b,\alpha} e^{\alpha(1-\cosh \mu)} \sinh^a \mu \cosh^b \mu$. Se ha definido $u = \alpha + j\omega L/c$. Las funciones $K_n(\cdot)$ son funciones de Bessel modificadas de segundo tipo, de orden n .

Para cada distribución de probabilidad $\eta(\mu)$ presentada en la tabla 3.1 se realizaron 300 simulaciones de la función de transferencia barriendo logarítmicamente la frecuencia normalizada $\omega L/c$ y con distintas cantidades de reflectores. Se utilizó una línea de base de $L = 10^3$ m y un factor de desvanecimiento $\alpha = 1$.

En la figura 3.2 se comparan las simulaciones realizadas con una de las distribuciones ($\eta_{3,1}(\mu)$) y la función de transferencia con distribución continua de reflectores. Se muestran las simulaciones realizadas con $N = 10^6$ reflectores. Se puede apreciar claramente cómo las simulaciones fluctúan alrededor de la función de transferencia con distribución continua de reflectores, poniendo en evidencia que la esperanza de la función de transferencia numérica coincide con la teórica.

En la figura 3.3 se muestran los resultados de las desviaciones estándar de las simulaciones con las distribuciones de probabilidad de la tabla 3.1, utilizando las 300 simulaciones para cada distribución y para cada N , tomando distintos valores de $\omega L/c$.

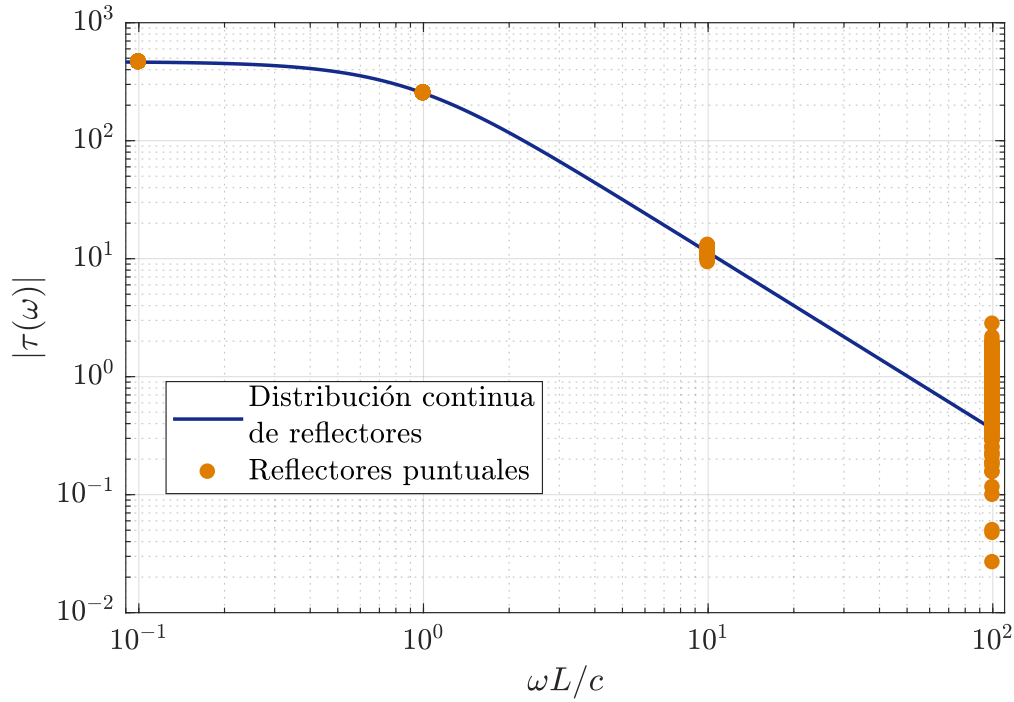


Figura 3.2: Simulaciones de la función de transferencia con reflectores puntuales cuyas coordenadas fueron generadas con la distribución $\eta_{3,1}(\mu)$. En línea continua, función de transferencia con distribución continua de reflectores. Se utilizaron $N = 10^6$ reflectores y una línea base de $L = 10^3$ m.

Si bien esta variable barre varios órdenes de magnitud, las simulaciones muestran cómo la desviación estándar es independiente a la misma, como se había predicho.

El conjunto de puntos por encima del resto muestra la desviación estándar de la función de transferencia generando las coordenadas de los reflectores con la distribución de probabilidad $\eta_{1,1}(\mu)$. Si bien teóricamente esta desviación diverge (tabla 3.1), en las simulaciones resulta una cantidad finita, pero que no sigue la pendiente que se espera que tenga en función de la cantidad de puntos (ecuación 3.9).

Las otras tres series de puntos representan las desviaciones estándar de la función de transferencia con las restantes distribuciones de probabilidad, en las que se muestra una reproducción muy fiel de los valores teóricos predichos.

Es importante destacar que el modelo utilizado hasta ahora es el de un escenario plano, donde todos los reflectores se encuentran en la misma cota que las antenas transmisora y receptora. Por lo tanto, si bien la distribución de probabilidad de coordenadas de reflectores $\eta_{1,1}(\mu)$ implica una varianza infinita, es debido a que pueden existir reflectores tan cercanos a las antenas que terminan por malograr el modelo. Es por esto que se buscan las otras distribuciones utilizadas, de manera de sacarle provecho a este modelo. En conclusión, en un escenario real, los reflectores deben estar lo suficientemente alejados de las antenas como para evitar este fenómeno.

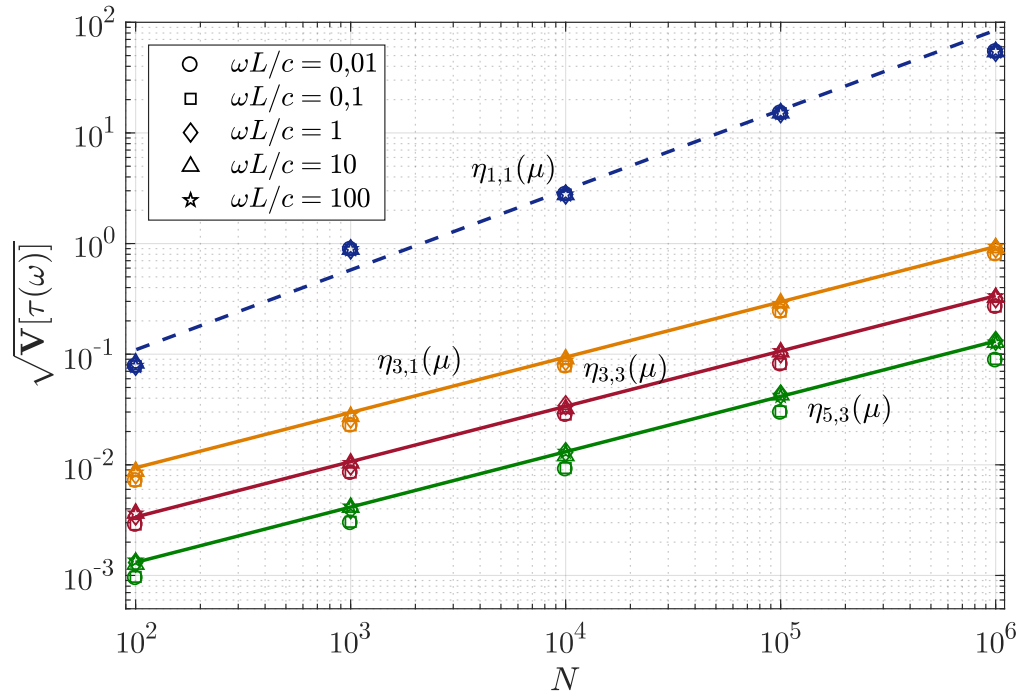


Figura 3.3: Desviación estándar en las simulaciones de la función de transferencia con reflectores puntuales. En línea continua, desviación teórica de la función de transferencia con reflectores puntuales. En línea de trazos, tendencia de la desviación con $\eta_{1,1}(\mu)$. La línea de base utilizada fue de $L = 10^3$ m.

Capítulo 4

Función de transferencia con sección eficaz aleatoria de los reflectores

Dentro de los parámetros que intervienen en un escenario biestático con múltiples reflectores, el valor de la sección eficaz es uno de los más difíciles de determinar a priori. Existen muchos factores que intervienen en el valor final de la sección eficaz, como propiedades dieléctricas del material, rugosidad y textura, temperatura, etcétera, por lo que ha sido objeto de estudio de muchos trabajos.

En este trabajo, se dedica un capítulo para modelar a la sección eficaz y los efectos que tiene sobre la función de transferencia de canal con múltiples reflexiones, incluso cuando se presenta un cambio de fase en cada reflexión.

4.1. Aleatoriedad en la sección eficaz de los reflectores

En los capítulos anteriores se había considerado a la raíz de sección eficaz de cada reflector como constante, con el propósito de aislar el problema a las fluctuaciones en la posición de los reflectores. En contraste, en este capítulo se considera a la raíz de sección eficaz ξ como una variable aleatoria para poder analizar cómo afecta al sistema biestático representado por la función de transferencia. Con este lineamiento, la raíz de sección eficaz del i ésimo reflector puede representarse como la suma de una componente determinista y una componente aleatoria de la siguiente manera

$$\xi_i = \xi_0 + g(\xi_0)W_i, \quad (4.1)$$

siendo ξ_0 el valor medio de la sección eficaz, W_i una variable aleatoria cuya esperanza es nula y autocorrelación $\mathbf{E}[W_i W_{i'}] = \delta_{ii'}$. Además $g(\xi_0)$, que coincide con la desviación estándar de la raíz de sección eficaz ξ_k , es introducida para representar el modelo de distribución estadística de la sección eficaz (Rayleigh, χ_4^2 , Rician, Weibull, etcétera), y que conlleva una relación entre la media y la desviación estándar, dependiendo de la

distribución. El modelo de la ecuación 4.1, sin embargo, sólo tiene en cuenta la media y la varianza de la sección eficaz ya que, como se verá inmediatamente, la esperanza y la varianza de la función de transferencia dependen únicamente de estas dos medidas, sin importar la distribución probabilística de ξ_i .

La distribución estadística de la variable W_i será de la forma de la distribución estadística de la raíz de la sección eficaz, normalizada para que la varianza sea unitaria y desfasada del origen para que la media sea nula. Con cualquiera de las distribuciones que se la modele, deberá cumplirse que $W_i \geq -\xi_0/g(\xi_0)$ de modo tal que se cumpla que $\xi_i \geq 0$.

De la ecuación 4.1 pueden extraerse sencillamente la esperanza, la autocorrelación y la varianza de la raíz de sección eficaz

$$\begin{aligned}\mathbf{E}[\xi_i] &= \xi_0 + g(\xi_0)\mathbf{E}[W_i] = \xi_0 \\ \mathbf{E}[\xi_i \xi_{i'}] &= \xi_0^2 + g(\xi_0)\mathbf{E}[W_i + W_{i'}] + g^2(\xi_0)\mathbf{E}[W_i W_{i'}] = \xi_0^2 + g^2(\xi_0)\delta_{ii'} \\ \mathbf{V}[\xi_i] &= g^2(\xi_0),\end{aligned}$$

donde se puede ver que en este modelo se establece una descorrelación estadística entre las secciones eficaces de los reflectores.

Retomando la ecuación 2.3, la función de transferencia está dada por

$$\tau(\omega) = \sum_{i=1}^N \mathcal{T}(\mathbf{r}_i, \omega) = \sum_{i=1}^N \frac{\xi_i L e^{j\omega L/c(1-\frac{T_i+R_i}{L})}}{T_i R_i}.$$

Como en el capítulo anterior, se analizan los parámetros estadísticos más relevantes de la función de transferencia, su esperanza, su autocorrelación y su varianza. Primero se analizará cómo es afectada la esperanza por la aleatoriedad en la sección eficaz de los reflectores.

$$\mathbf{E}[\tau(\omega)] = \sum_{i=1}^N \frac{\mathbf{E}[\xi_i] L e^{j\omega L/c(1-\frac{T_i+R_i}{L})}}{T_i R_i} = \sum_{i=1}^N \frac{\xi_0 L e^{j\omega L/c(1-\frac{T_i+R_i}{L})}}{T_i R_i}.$$

La esperanza de la función de transferencia, cuando se considera aleatoriedad en la sección eficaz de los reflectores, es igual a una función de transferencia con todos los reflectores con la misma sección eficaz e igual a su valor medio, ξ_0 . En otras palabras, como la raíz de sección eficaz de cada reflector afecta de manera directa únicamente al camino correspondiente a este reflector, y dado que la función de transferencia es la superposición aditiva de todos estos caminos, el valor esperado de la función de transferencia es idéntico al de aquella con un escenario de sección eficaz constante.

Con la misma idea utilizada en los capítulos anteriores, puede aproximarse la su-

matoria a una integral en el plano. Resulta entonces

$$\mathbf{E}[\tau(\omega)] = \int_{\mathbb{R}^2} n(\mathbf{r}) \frac{\xi_0 L e^{j\omega L/c(1-\cosh \mu)}}{TR} d^2 \mathbf{r}.$$

Transformando la integral a coordenadas elípticas y utilizando la relación en 3.1,

$$\mathbf{E}[\tau(\omega)] = \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \frac{N \xi_0 L}{(L/2)^2} \frac{\eta(\mu, \nu) e^{j\omega L/c(1-\cosh \mu)}}{\cosh^2 \mu - \cos^2 \nu} d\mu d\nu. \quad (4.2)$$

A su vez, la autocorrelación puede obtenerse de la siguiente manera

$$\mathbf{E}[\tau(\omega_1)\tau^*(\omega_2)] = \sum_{i=1}^N \sum_{i'=1}^N \frac{\mathbf{E}[\xi_i \xi_{i'}] L^2 e^{j\omega_1 L/c(1-\frac{T_i+R_i}{L})} e^{-j\omega_2 L/c(1-\frac{T_{i'}+R_{i'}}{L})}}{T_i R_i T_{i'} R_{i'}} ..$$

Por propiedades de ξ mencionadas previamente, $\mathbf{E}[\xi_i \xi_{i'}] = \xi_0^2 + g^2(\xi_0) \delta_{ii'}$. Por lo tanto, la autocorrelación de la función de transferencia resulta

$$\mathbf{E}[\tau(\omega_1)\tau^*(\omega_2)] = \mathbf{E}[\tau(\omega_1)] \mathbf{E}[\tau^*(\omega_2)] + \sum_{i=1}^N \frac{g^2(\xi_0) L^2 e^{j\Delta\omega L/c(1-\frac{T_i+R_i}{L})}}{T_i^2 R_i^2},$$

con $\Delta\omega = \omega_1 - \omega_2$.

Con la misma idea utilizada en los capítulos anteriores, puede aproximarse la sumatoria a una integral en el plano. Resulta entonces

$$\mathbf{E}[\tau(\omega_1)\tau^*(\omega_2)] - \mathbf{E}[\tau(\omega_1)] \mathbf{E}[\tau^*(\omega_2)] = \int_{\mathbb{R}^2} n(\mathbf{r}) \frac{g^2(\xi_0) L^2 e^{j\Delta\omega L/c(1-\frac{T+R}{L})}}{T^2 R^2} d^2 \mathbf{r}.$$

El miembro de la izquierda puede identificarse como la covarianza de la función de transferencia. Como la covarianza depende únicamente de la diferencia de frecuencias $\Delta\omega$, se dice que la función de transferencia es un proceso estacionario en ω .

Cuando $\Delta\omega = 0$ ($\omega_1 = \omega_2$) se obtiene la varianza, que es igual a

$$\mathbf{V}[\tau(\omega)] = \int_{\mathbb{R}^2} n(\mathbf{r}) \frac{g^2(\xi_0) L^2}{T^2 R^2} d^2 \mathbf{r}.$$

Transformando la integral a coordenadas elípticas y utilizando la relación en 3.1,

$$\mathbf{V}[\tau(\omega)] = \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \frac{4N g^2(\xi_0)}{(L/2)^2} \frac{\eta(\mu, \nu)}{(\cosh^2 \mu - \cos^2 \nu)^2} d\mu d\nu. \quad (4.3)$$

De igual manera que en los capítulos anteriores, $\eta(\mu, \nu)$ es la distribución de probabilidad con que luego se generan las coordenadas de los reflectores. En la siguiente

sección se compararán los resultados obtenidos en este capítulo con simulaciones de la función de transferencia.

4.2. Comparación de resultados analíticos con simulaciones numéricas

En esta sección se presentan resultados de simulaciones de la función de transferencia con sección eficaz de cada reflector aleatoria, para luego contrastarlos con los resultados que se predijeron en la sección anterior. Las coordenadas de los reflectores fueron generadas con distribuciones de probabilidad $\eta(\mu, \nu)$ isotrópicas, es decir, independientes de la variable angular ν , por lo que $\eta(\mu, \nu) = \eta(\mu)/2\pi$. Con esta condición, las ecuaciones 4.2 y 4.3 pueden escribirse como

$$\mathbf{E}[\tau(\omega)] = \frac{4N\xi_0}{L} \int_0^\infty \eta(\mu) \frac{e^{j\omega L/c(1-\cosh \mu)}}{\cosh \mu \sinh \mu} d\mu \quad (4.4)$$

$$\mathbf{V}[\tau(\omega)] = \frac{8Ng^2(\xi_0)}{L^2} \int_0^\infty \eta(\mu) \frac{2\cosh^2 \mu - 1}{\cosh^3 \mu \sinh^3 \mu} d\mu. \quad (4.5)$$

Es preciso resaltar la semejanza entre las ecuaciones 4.4 y 3.8 y entre 4.5 y 3.9. Por una parte, el valor esperado de la función de transferencia coincide exactamente si las fluctuaciones están en las posiciones de los reflectores o si están en la sección eficaz. Por otro lado, en cuanto a la varianza de la función de transferencia, sólo existe un factor de diferencia cuando hay aleatoriedad en las posiciones de los reflectores o en sus secciones eficaces (ξ_0 o $g(\xi_0)$, respectivamente).

Se realizaron simulaciones de la función de transferencia con las distribuciones de probabilidad $\eta_{1,1}(\mu)$, $\eta_{3,1}(\mu)$, $\eta_{3,3}(\mu)$ y $\eta_{5,3}(\mu)$ para generar las coordenadas de los reflectores. El parámetro que se tomó para analizar la función de transferencia fue la desviación estándar de la raíz de sección eficaz, $g(\xi_0)$, ya que parámetros como N fueron analizados en el capítulo anterior. Para aislar completamente el análisis de la influencia de este parámetro sobre la función de transferencia, se fijaron las posiciones de los reflectores.

Se fijó un valor de $\xi_0 = 1$ m, mientras que las variables W_i se simulaban independientemente entre sí, con una distribución de probabilidad triangular, de esperanza nula y varianza unitaria. El motivo de haber elegido una distribución triangular no excede el hecho de que sólo la esperanza y la varianza de la sección eficaz son determinantes en este análisis, y tiene más simplicidad que las otras distribuciones (Rayleigh, χ^2 , Rician, etcétera) para la generación. Se utilizaron $N = 10^6$ reflectores y una línea

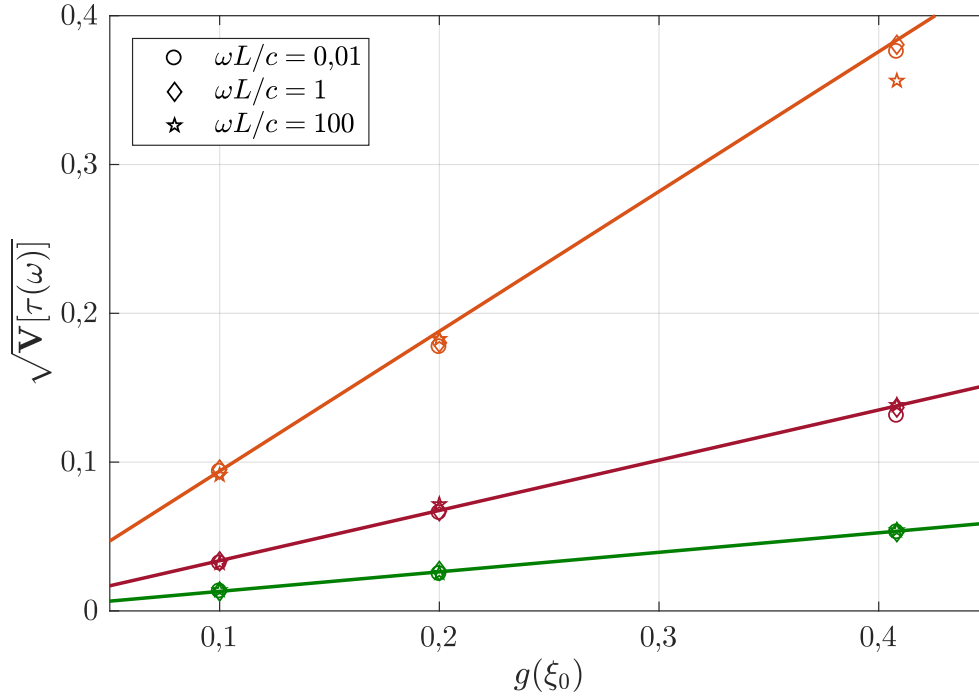


Figura 4.1: Desviación estándar en las simulaciones de la función de transferencia con sección eficaz aleatoria en los reflectores. En línea continua, desviación teórica de la función de transferencia para distribuciones $\eta_{3,1}(\mu)$, $\eta_{3,3}(\mu)$ y $\eta_{5,3}(\mu)$. La distancia utilizada entre las antenas fue de $L = 10^3$ m.

de base $L = 10^3$ m.

En la figura 4.1 se muestran los resultados de la desviación estándar de la función de transferencia utilizando 300 realizaciones para cada caso. En línea continua se muestran los resultados que surgen de resolver la ecuación 4.5 para cada distribución. Se puede ver que las desviaciones estándar son independientes de la frecuencia de trabajo, como sucedía con las fluctuaciones en las posiciones de los reflectores y que los resultados obtenidos de las simulaciones se aproximan a los teóricos. En la 4.1 no se muestran los resultados de la distribución $\eta_{1,1}(\mu)$ porque sus valores superaban ampliamente a los de las restantes distribuciones. Esto puede explicarse analizando que en la ecuación 4.5, al igual que en las fluctuaciones de las posiciones de los reflectores (3.9), la integral converge sólo cuando la distribución de probabilidad $\eta(\mu) \sim \mu^{2+\beta}$ cuando $\mu \rightarrow 0$, con $\beta > 0$, lo cual no sucede con $\eta_{1,1}(\mu)$ pero sí con las otras.

4.3. Cambio de fase por reflexiones

Cuando una onda electromagnética se refleja en un objeto se puede producir un cambio de la fase de la onda reflejada respecto de la transmitida [19]. Este fenómeno puede introducirse en la función de transferencia considerando a la raíz cuadrada de la sección eficaz como un valor complejo, cuyo módulo representa la relación de am-

plitudes entre la onda reflejada y transmitida y cuya fase representa el cambio de fase mencionado.

Por lo tanto, la función de transferencia puede reescribirse, según 2.3, como

$$\tau(\omega) = \sum_{i=1}^N \frac{\xi_i e^{-j\phi_i} L}{T_i R_i} e^{j\omega L/c(1-\frac{T_i+R_i}{L})} = \sum_{i=1}^N e^{-j\phi_i} \mathcal{T}(\mathbf{r}_i, \omega),$$

donde ϕ_i es el cambio de fase producido por el i ésimo reflector.

El cambio de fase producido por i ésimo reflector es, sin embargo, un valor que depende de muchas variables vinculadas con el tipo y composición del reflector. Se puede considerar, entonces, a la fase ϕ_i como una variable aleatoria, con una determinada distribución de probabilidad. El caso más general es que esta distribución de probabilidad varíe según el índice i .

A continuación se muestran resultados de los parámetros estadísticos de la función de transferencia para el caso en que esta distribución varía de acuerdo a cada reflector.

La esperanza de la función de transferencia puede calcularse como

$$\mathbf{E}[\tau(\omega)] = \sum_{i=1}^N \mathbf{E}[e^{-j\phi_i}] \mathcal{T}(\mathbf{r}_i, \omega) = \sum_{i=1}^N \mathcal{F}_{\phi_i}(-1) \mathcal{T}(\mathbf{r}_i, \omega),$$

donde $\mathcal{F}_{\phi_i}(\cdot)$ es la función característica de la distribución de probabilidad de la fase ϕ_i .

Si la distribución de probabilidad de los cambios de fase son idénticas, entonces las funciones características son todas iguales. Si se expresa en coordenadas elípticas, y asumiendo la raíz de sección eficaz constante ($\xi_i = \xi_0$) para focalizar el análisis en el cambio de fase, resulta que la esperanza de la función de transferencia en función de la distribución de probabilidad es

$$\mathbf{E}[\tau(\omega)] = \mathcal{F}_{\phi}(-1) \int_0^{\infty} \int_0^{2\pi} \frac{N\xi_0 L}{(L/2)^2} \frac{\eta(\mu, \nu) e^{j\omega L/c(1-\cosh \mu)}}{\cosh^2 \mu - \cos^2 \nu} d\mu d\nu, \quad (4.6)$$

Una propiedad importante de la función característica es que su valor absoluto es menor o igual que uno:

$$|\mathcal{F}_{\phi}(x)| = |\mathbf{E}[e^{-jx\phi}]| \leq \mathbf{E}[|e^{-jx\phi}|] = \mathbf{E}[1] = 1.$$

Con esta propiedad, se puede deducir de 4.6 que, siempre que se produzcan cambios de fase aleatorios en cada reflector, el valor esperado de la función de transferencia tiende a atenuarse respecto de la función de transferencia cuando no hay cambios de fase en las reflexiones.

El cambio de fase en un reflector puede modelarse como independiente de la de otro reflector ya que, en principio, no hay factores que contribuyan a una correlación estadística entre ellos. De esta manera, la fase cumple que $\mathbf{E}[e^{j\phi_i}e^{j\phi_{i'}}] = \delta_{ii'}$ y, por lo tanto, la autocorrelación de la función de transferencia es

$$\begin{aligned}\mathbf{E}[\tau(\omega_1)\tau^*(\omega_2)] &= \sum_{i=1}^N \sum_{i'=1}^N \mathbf{E}[e^{-j(\phi_i - \phi_{i'})}] \mathcal{T}(\mathbf{r}_i, \omega_1) \mathcal{T}^*(\mathbf{r}_{i'}, \omega_2) \\ &= \sum_{i=1}^N \mathcal{T}(\mathbf{r}_i, \omega_1) \mathcal{T}^*(\mathbf{r}_i, \omega_2).\end{aligned}$$

Tomando el límite de una distribución continua y expresando en coordenadas elípticas y utilizando la relación 3.1 resulta

$$\mathbf{E}[\tau(\omega_1)\tau^*(\omega_2)] = \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \frac{4N\xi_0^2}{(L/2)^2} \frac{\eta(\mu, \nu)}{(\cosh^2 \mu - \cos^2 \nu)^2} d\mu d\nu,$$

donde se puede ver que la autocorrelación resulta no depender de la distribución estadística del cambio de fase en las reflexiones. La varianza resulta entonces

$$\mathbf{V}[\tau(\omega)] = \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \frac{4N\xi_0^2}{(L/2)^2} \frac{\eta(\mu, \nu)}{(\cosh^2 \mu - \cos^2 \nu)^2} d\mu d\nu - |\mathbf{E}[\tau(\omega)]|^2. \quad (4.7)$$

4.4. Simulaciones con cambio de fase en la reflexión

Para las variables ϕ_i se consideró una distribución de probabilidad gaussiana, de media nula y desviación estándar Σ_ϕ . Con esta distribución, $\mathcal{F}_\phi(-1) = e^{-\Sigma_\phi^2}$. Por lo tanto, 4.6 se convierte en

$$\mathbf{E}[\tau(\omega)] = e^{-\Sigma_\phi^2} \frac{4N\xi_0}{L} \int_0^\infty \eta(\mu) \frac{e^{j\omega L/c(1-\cosh \mu)}}{\cosh \mu \sinh \mu} d\mu.$$

Se simuló la función de transferencia colocando reflectores siguiendo la distribución de probabilidad $\eta(\mu, \nu) = \eta_{1,1}(\mu)/2\pi$ y $\alpha = 1$, y las antenas distanciadas $L = 10^3$ m. Se hicieron 300 realizaciones con $N = 10^6$ reflectores para distintos valores de Σ_ϕ y para cada valor de $\omega L/c$, cuyos promedios se indican en la figura 4.2 con puntos. En línea continua se representa al valor teórico, que surge de resolver la integral de la esperanza y multiplicarla por el factor que la antecede.

Se puede ver en la figura 4.2 cómo disminuye el valor esperado de la función de transferencia a medida que aumenta la desviación estándar del cambio de fase producido en las reflexiones. En el caso límite en que esta desviación se hace muy grande, la

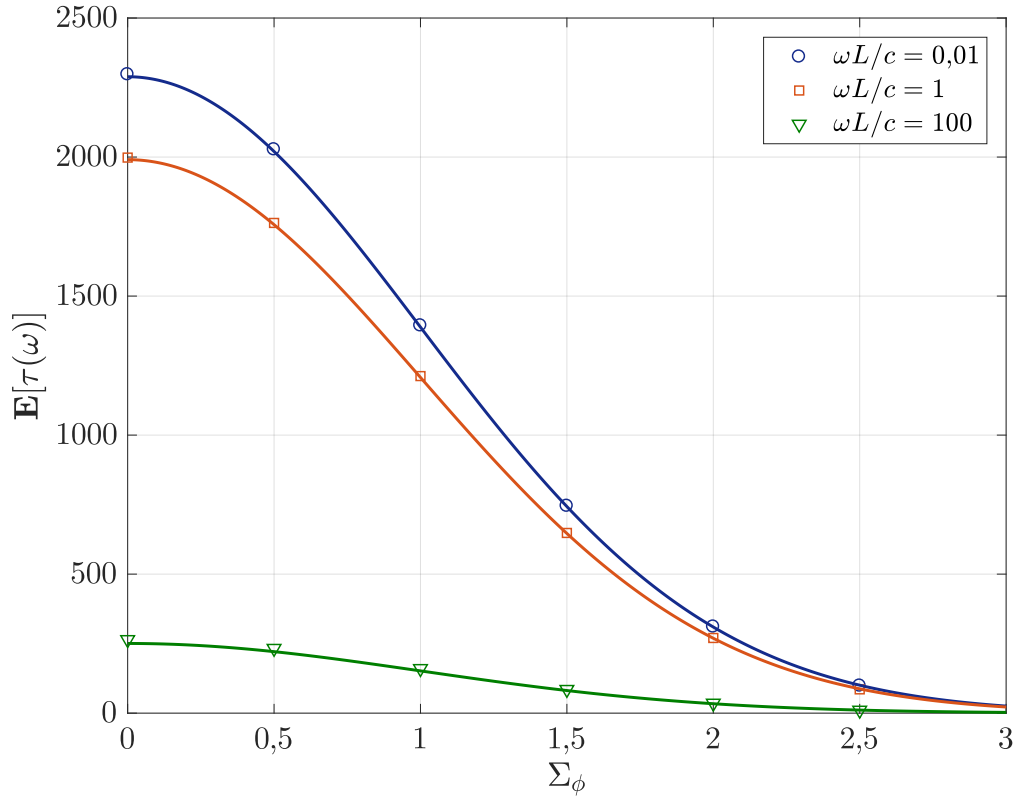


Figura 4.2: Valor esperado de la función de transferencia en función de la desviación estándar del cambio de fase producido por la reflexión. Los puntos representan los promedios de 300 realizaciones de la función de transferencia y las líneas continuas la dependencia teórica, todas con la distribución $\eta 1, 1(\mu)$. La línea de base utilizada fue de $L = 10^3$ m.

esperanza de la función de transferencia tiende a anularse. En ese límite, el cambio de fase (módulo 2π) tiene distribución uniforme en $[-\pi, \pi)$ y provoca el desvanecimiento total de la esperanza de transferencia de señal en el canal con reflectores. Entonces la función de transferencia resulta un proceso aleatorio de media nula y varianza igual a como se indica en 4.7.

Capítulo 5

Función de transferencia con alturas de reflectores aleatorias

Hasta este momento, los reflectores se han presentado sobre un mismo plano, coincidente con las alturas de las antenas, es decir, se ha trabajado con un modelo planar. Sin embargo, en un radar biestático real, un reflector no está restringido a existir con esa condición, sino que puede tener una cota fuera del plano e incluso ésta puede variar aleatoriamente. En este capítulo se analiza, en una primera instancia, cómo la aleatoriedad de la cota afecta a la función de transferencia en una distribución plana de reflectores y, en segunda instancia, cómo la afecta en una distribución no plana.

5.1. Altura aleatoria de los reflectores con distribución plana

Denominando a la altura del i ésimo reflector como z_i , y considerándola como una variable aleatoria cuya esperanza es nula (el plano de las antenas indica la cota cero) y autocorrelación $\mathbf{E}[z_i z_{i'}] = \mathbf{V}[z] \delta_{ii'}$, las distancias del transmisor al reflector y del reflector al receptor pueden escribirse respectivamente como

$$\begin{aligned} T_i &= \bar{T}_i \sqrt{1 + (z_i/\bar{T}_i)^2} > \bar{T}_i \\ R_i &= \bar{R}_i \sqrt{1 + (z_i/\bar{R}_i)^2} > \bar{R}_i. \end{aligned} \tag{5.1}$$

Por otro lado, la función de transferencia, expresada en 2.3 como sumatoria de las múltiples reflexiones, es igual a

$$\tau(\omega) = \sum_{i=1}^N \mathcal{T}(\mathbf{r}_i, \omega) = \sum_{i=1}^N \frac{\xi_i L e^{j\omega L/c(1 - \frac{T_i + R_i}{L})}}{T_i R_i}.$$

A diferencia de la función de transferencia con fluctuaciones en la sección eficaz, cuando hay aleatoriedad en las alturas de los reflectores es matemáticamente más complicado obtener resultados exactos en los parámetros estadísticos como la esperanza. Esto es porque z_i se encuentra en el exponente (afectando la fase) y en el denominador (afectando la atenuación por propagación) de cada término de la sumatoria.

Sin embargo, pueden hacerse aproximaciones para calcular la esperanza. Cada término de la función de transferencia puede desarrollarse en Taylor de la siguiente manera

$$\mathcal{T}(\mathbf{r}_i, \omega) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\partial_{(z_i/L)}^n \mathcal{T}(\mathbf{r}_i, \omega)|_{(z_i/L)=0}}{n!} (z_i/L)^n.$$

Antes de despreciar cualquier término, es necesario aclarar que, como z_i/L aparece en el exponente multiplicado por $\omega L/c$, es predecible que el término n ésimo depende de $(\omega L/c)^n$. Como consecuencia de esto, sólo se pueden despreciar términos de orden superior siempre que $\omega L/c$ no sea muy grande. En la siguiente sección se hace un análisis en el caso de que $\omega L/c$ sea grande.

Si las fluctuaciones de las alturas de los reflectores cumplen que $z_i \ll L$, pueden despreciarse términos de orden superior, resultando

$$\begin{aligned} \mathcal{T}(\mathbf{r}_i, \omega) = & \mathcal{T}(\mathbf{r}_i, \omega)|_{(z_i/L)=0} + \partial_{(z_i/L)} \mathcal{T}(\mathbf{r}_i, \omega)|_{(z_i/L)=0} (z_i/L) + \\ & + \frac{1}{2} \partial_{(z_i/L)}^2 \mathcal{T}(\mathbf{r}_i, \omega)|_{(z_i/L)=0} (z_i/L)^2 + \mathcal{O}((z_i/L)^3) \mathcal{O}((\omega L/c)^3). \end{aligned}$$

Bajo las condiciones antes mencionadas, la función de transferencia puede escribirse como la siguiente aproximación

$$\begin{aligned} \tau(\omega) \approx \sum_{i=1}^N [& \mathcal{T}(\mathbf{r}_i, \omega)|_{(z_i/L)=0} + \partial_{(z_i/L)} \mathcal{T}(\mathbf{r}_i, \omega)|_{(z_i/L)=0} (z_i/L) + \\ & + \frac{1}{2} \partial_{(z_i/L)}^2 \mathcal{T}(\mathbf{r}_i, \omega)|_{(z_i/L)=0} (z_i/L)^2]. \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta que la variación de z_i sobre su valor medio afecta a la amplitud y a la fase de $\mathcal{T}(\mathbf{r}_i, \omega)$ con el mismo signo (las funciones en 5.1 son pares respecto de z_i), entonces la derivada de primer orden se anula. La derivada segunda representa la convexidad de la función \mathcal{T} respecto de z_i . Resulta entonces que

$$\begin{cases} \partial_{(z_i/L)} \mathcal{T}(\mathbf{r}_i, \omega)|_{(z_i/L)=0} = 0 \\ \partial_{(z_i/L)}^2 \mathcal{T}(\mathbf{r}_i, \omega)|_{(z_i/L)=0} = -\mathcal{T}(\mathbf{r}_i, \omega)|_{(z_i/L)=0} L^2 \left(\frac{\bar{T}_i^2 + \bar{R}_i^2}{\bar{T}_i^2 \bar{R}_i^2} + j \frac{\omega}{c} \frac{\bar{T}_i + \bar{R}_i}{\bar{T}_i \bar{R}_i} \right) \end{cases}$$

y la transferencia puede reescribirse como

$$\tau(\omega) \approx \sum_{i=1}^N \mathcal{T}(\mathbf{r}_i, \omega)|_{(z_i/L)=0} \left[1 - \frac{z_i^2}{2} \left(\frac{\bar{T}_i^2 + \bar{R}_i^2}{\bar{T}_i^2 \bar{R}_i^2} + j \frac{\omega}{c} \frac{\bar{T}_i + \bar{R}_i}{\bar{T}_i \bar{R}_i} \right) \right].$$

Con esta aproximación de la función de transferencia, puede calcularse más fácilmente su esperanza

$$\mathbf{E}[\tau(\omega)] = \tau_0(\omega) - \sum_{i=1}^N \frac{\mathbf{V}[z_i]}{2} \mathcal{T}(\mathbf{r}_i, \omega)|_{(z_i/L)=0} \left(\frac{\bar{T}_i^2 + \bar{R}_i^2}{\bar{T}_i^2 \bar{R}_i^2} + j \frac{\omega}{c} \frac{\bar{T}_i + \bar{R}_i}{\bar{T}_i \bar{R}_i} \right),$$

donde $\tau_0(\omega)$ es la función de transferencia con $z_i = 0$ para todo i . Asumiendo que las alturas z_i tienen las mismas distribuciones de probabilidad, y aproximando a una distribución continua de reflectores,

$$\mathbf{E}[\tau(\omega)] = \tau_0(\omega) - \frac{\mathbf{V}[z]}{2} \int_{\mathbb{R}^2} n(\mathbf{r}) \frac{\xi_0 L e^{j\omega L/c(1-\frac{\bar{T}+\bar{R}}{L})}}{\bar{T}\bar{R}} \left(\frac{\bar{T}^2 + \bar{R}^2}{\bar{T}^2 \bar{R}^2} + j \frac{\omega}{c} \frac{\bar{T} + \bar{R}}{\bar{T}\bar{R}} \right) d^2\mathbf{r},$$

y luego a coordenadas elípticas utilizando 3.1, considerando $\eta(\mu, \nu) = \eta/2\pi$, integrando en ν y haciendo ciertas simplificaciones resulta igual a

$$\begin{aligned} \mathbf{E}[\tau(\omega)] = \tau_0(\omega) - \frac{\mathbf{V}[z]}{L^2} \frac{4N\xi_0}{L} \int_0^\infty \eta(\mu) \frac{e^{j\omega L/c(1-\cosh \mu)}}{\cosh \mu \sinh \mu} \times \\ \times \left[\frac{1 - 2 \cosh^2 \mu + 4 \cosh^4 \mu}{\cosh^2 \mu \sinh^4 \mu} + j\omega L/c \frac{2 \cosh^2 \mu - 1}{\cosh \mu \sinh^2 \mu} \right] d\mu. \end{aligned}$$

Puede verse que la esperanza de la función de transferencia no es igual a la función de transferencia sin fluctuaciones en las alturas, sino que existe un término que depende del momento de segundo orden de z . Además, la esperanza converge a un valor finito siempre que $\eta(\mu)$ sea de tal forma que la integral converja. Esto sucede si $\eta(\mu) \sim \mu^{4+\beta}$ cuando $\mu \rightarrow 0$, con $\beta > 0$. Una de las posibles distribuciones de probabilidad que hacen que la integral converja es $\eta(\mu) = \eta_{5,3}(\mu)$ y su esperanza es igual a

$$\begin{aligned} \mathbf{E}[\tau(\omega)] = \tau_0(\omega) - \frac{\mathbf{V}[z]}{L^2} \frac{4N\xi_0}{L} \frac{e^u}{u^4} \left(u(3u(4+u^2) + j\omega L/c(24+u^2)) K_0(u) + \right. \\ \left. + 2(3u(4+u^2) + 4j\omega L/c(6+u^2)) K_1(u) \right), \end{aligned}$$

siendo $u = \alpha + j\omega L/c$.

5.2. Simulaciones de transferencia con fluctuaciones en alturas de reflectores

Se simuló la función de transferencia utilizando reflectores con alturas aleatorias de media nula y varianza variable. La cantidad de reflectores utilizada fue de $N = 10^6$, ubicados siguiendo la distribución de probabilidad $\eta_{5,3}(\mu)$ con $\alpha = 1$ y una línea de base de $L = 10^3$ m. La variable en la que se enfocaron las simulaciones fue $\Delta \mathbf{E}[\tau] = \mathbf{E}[\tau] - \tau_0$, que es la diferencia entre el valor esperado de la transferencia con alturas aleatorias de reflectores y la transferencia con reflectores de cota nula.

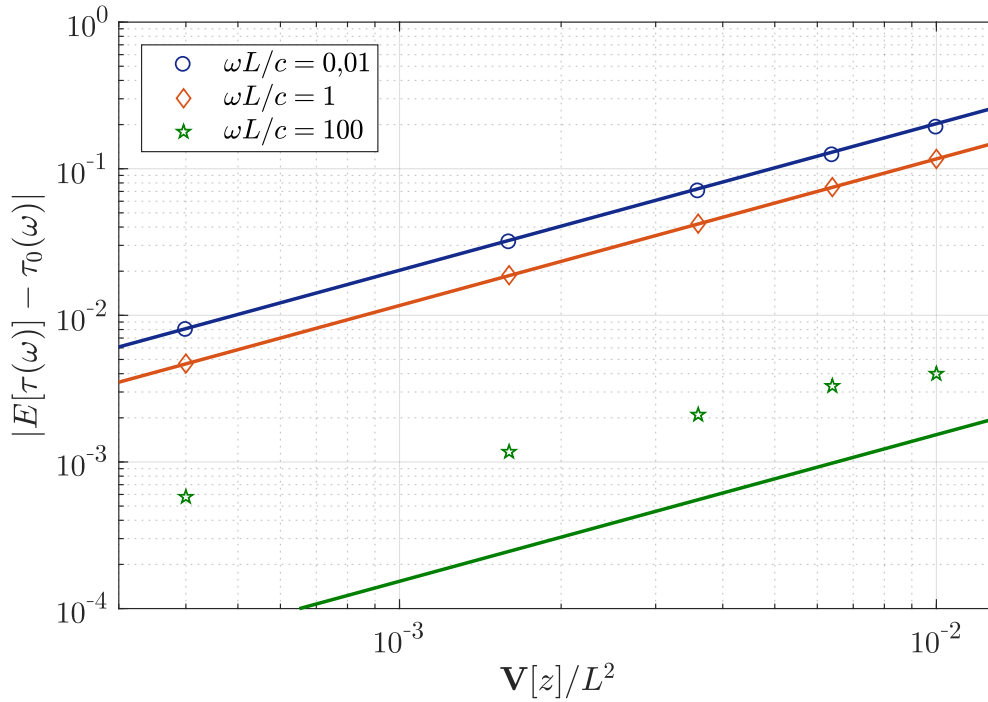


Figura 5.1: Valor absoluto de la desviación del valor esperado de la función de transferencia con alturas aleatorias de los reflectores respecto de la transferencia con reflectores sin alturas, en función de la varianza de las alturas. Los puntos representan a las simulaciones y las líneas continuas la dependencia teórica. La cantidad de reflectores utilizada fue de $N = 10^6$ y la línea de base de $L = 10^3$ m.

Se hicieron 300 simulaciones de la transferencia con alturas aleatorias de reflectores y luego se le restó la función de transferencia como promedio de las mismas 300 transferencias pero sin alturas aleatorias con el fin de compensar la aleatoriedad que surge de la generación de las posiciones de los reflectores. Para comparar con los resultados teóricos, se generaron las alturas z_i con distribución gaussiana de media nula y distintos valores de $\mathbf{V}[z]/L^2$, como se indica en la figura 5.1. Puede verse que las simulaciones se asemejan a los valores teóricos para valores de $\omega L/c$ no muy grandes. Pero para valores grandes, los resultados no coinciden con los teóricos porque en los teóricos se supuso la aproximación de $\omega L/c \lesssim 1$.

En el caso de que $\omega L/c \gg 1$, se puede considerar que la altura del i ésimo reflector no afecta a la amplitud de $\mathcal{T}(\mathbf{r}_i, \omega)$, pero sí a su fase. Considerando esto, puede utilizarse el modelo de cambio de fase por reflexión, analizado en el capítulo anterior, haciendo corresponder un cambio de fase ϕ_i con la altura z_i ,

$$\phi_i = \frac{\omega}{c}(\Delta R_i + \Delta T_i) \approx \frac{\omega L}{c} \frac{z_i^2}{2L} \frac{\bar{R}_i + \bar{T}_i}{\bar{R}_i \bar{T}_i},$$

siendo $\Delta R_i = R_i - \bar{R}_i$ y $\Delta T_i = T_i - \bar{T}_i$ las diferencias de caminos resultantes.

5.3. Altura aleatoria de los reflectores con distribución no plana

En las secciones previas se analizó cómo afecta quitar la restricción de cota nula en los reflectores, considerando a su altura como una variable aleatoria, pero cuyo valor medio era nulo. En esta sección se hace un análisis semejante pero con valor medio de las alturas distinto de cero. La altura del i ésimo reflector puede representarse como

$$z_i = \bar{z}_i + \Delta_i,$$

siendo Δ_i una variable aleatoria de media nula y autocorrelación $\mathbf{E}[\Delta_i \Delta_{i'}] = \mathbf{V}[\Delta_i] \delta_{ii'}$.

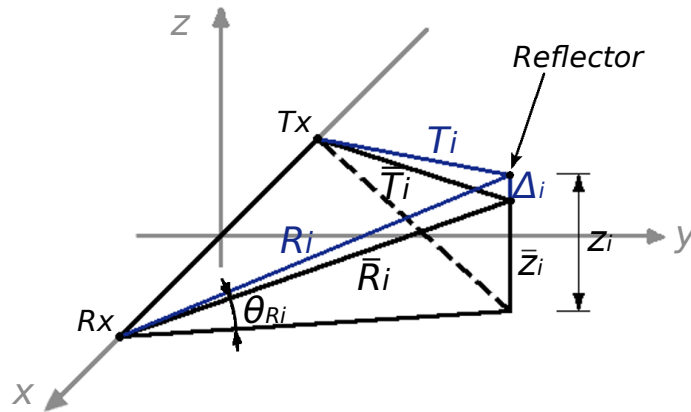


Figura 5.2: Detalle de la desviación en altura sobre el valor medio de un reflector. Tx y Rx representan las antenas transmisora y receptora.

Teniendo de guía a la figura 5.2, las distancias de la transmisora al reflector y del

reflector a la receptora pueden calcularse utilizando la ley del coseno, y resultan

$$T_i = \bar{T}_i \sqrt{1 + 2(\Delta_i/\bar{T}_i) \sin \theta_{T_i} + (\Delta_i/\bar{T}_i)^2} > \bar{T}_i$$

$$R_i = \bar{R}_i \sqrt{1 + 2(\Delta_i/\bar{R}_i) \sin \theta_{R_i} + (\Delta_i/\bar{R}_i)^2} > \bar{R}_i,$$

donde θ_{T_i} y θ_{R_i} representan los ángulos de elevación desde la antena transmisora y receptora hacia la posición media del reflector.

Como en el caso de la distribución plana, los parámetros estadísticos de la función de transferencia son matemáticamente difícil de obtener. Sin embargo, si se considera que las desviaciones de las alturas respecto de su valor medio son pequeñas respecto de las distancias T_i , R_i o L , se puede hacer la misma aproximación con una serie de Taylor. En el caso de la distribución no plana, a diferencia de la plana, las variaciones de la altura no afectan con el mismo signo ni a la amplitud de $\mathcal{T}(\mathbf{r}_i, \omega)$ ni a su fase. Las derivada primera resulta

$$\partial_{(\Delta_i/L)} \mathcal{T}(\mathbf{r}_i, \omega)|_{(\Delta_i/L)=0} = -\mathcal{T}(\mathbf{r}_i, \omega)|_{(\Delta_i/L)=0} \left[\left(\frac{L}{\bar{T}_i} + j \frac{\omega L}{c} \right) \sin \theta_{T_i} + \left(\frac{L}{\bar{R}_i} + j \frac{\omega L}{c} \right) \sin \theta_{R_i} \right],$$

y la derivada segunda

$$\begin{aligned} \partial_{(\Delta_i/L)}^2 \mathcal{T}(\mathbf{r}_i, \omega)|_{(\Delta_i/L)=0} = & -\mathcal{T}(\mathbf{r}_i, \omega)|_{(\Delta_i/L)=0} \left[\left(\frac{L^2}{\bar{T}_i^2} + \frac{L^2}{\bar{R}_i^2} \right) + j \frac{\omega L}{c} \left(\frac{L}{\bar{T}_i} + \frac{L}{\bar{R}_i} \right) \right] + \\ & + \left(3 \frac{L^2}{\bar{T}_i^2} + 3j \frac{\omega L}{c} \frac{L}{\bar{T}_i} - \frac{\omega^2 L^2}{c^2} \right) \sin^2 \theta_{T_i} + \\ & + \left(3 \frac{L^2}{\bar{R}_i^2} + 3j \frac{\omega L}{c} \frac{L}{\bar{R}_i} - \frac{\omega^2 L^2}{c^2} \right) \sin^2 \theta_{R_i} + \\ & + 2 \left(\frac{L}{\bar{T}_i} + j \frac{\omega L}{c} \right) \left(\frac{L}{\bar{R}_i} + j \frac{\omega L}{c} \right) \sin \theta_{T_i} \sin \theta_{R_i} \Big]. \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta la aproximación en Taylor de la función de transferencia, se pueden calcular la esperanza y la varianza como

$$\mathbf{E}[\tau(\omega)] \approx \tau_0(\omega) + \sum_{i=0}^N \partial_{(\Delta_i/L)}^2 \mathcal{T}(\mathbf{r}_i, \omega)|_{(\Delta_i/L)=0} \mathbf{V}[\Delta_i]/L^2$$

$$\mathbf{V}[\tau(\omega)] \approx \sum_{i=0}^N \left| \partial_{(\Delta_i/L)} \mathcal{T}(\mathbf{r}_i, \omega)|_{(\Delta_i/L)=0} \right|^2 \mathbf{V}[\Delta_i]/L^2.$$

En este trabajo se realizaron simulaciones sobre la aleatoriedad de las alturas en un escenario tridimensional y se presentan en el siguiente capítulo. El escenario elegido fue obtenido de un mapa de alturas del entorno de la ciudad de San Carlos de Bariloche. Sin embargo, debido a la dificultad de calcular de manera analítica la esperanza y la varianza en ese entorno, no se contrastaron los resultados obtenidos, aunque sí se

observó la dependencia de la varianza con $\mathbf{V}[\Delta_i]$.

Capítulo 6

Aplicación a radar biestático situado en alrededores de Bariloche

En este capítulo se aplican los resultados obtenidos hasta el momento a un sistema de radar biestático para la detección de aviones ubicado en cercanías de San Carlos de Bariloche. También se complementa y concluye el tema de aleatoriedad en alturas, expuesto en la sección anterior, en un escenario tridimensional. Además, como extensión, se calculan los coeficientes a ser utilizados en la recepción del sistema en cuestión para estimar la señal recibida debido a reflexiones en el terreno, utilizando los modelos de propagación de espacio libre y dos modelos recomendados por la ITU.

6.1. Descripción del entorno y modelo digital de terreno

El radar biestático que se modela en este capítulo se encuentra ubicado en la zona de alrededores de la ciudad de San Carlos de Bariloche. En la figura 6.1 se muestra una vista satelital de la zona.

En este capítulo, para obtener las alturas del terreno, se utilizó un modelo digital de terreno, que es un mapa grillado en el que cada celda contiene una determinada altura sobre el nivel del mar. El mapa cubre el rango de latitudes desde -40° hasta -42° y de longitudes desde -72° hasta -70° y tiene un grillado regular de 3 arcosegundos por 3 arcosegundos. Debido a la forma elipsoidal de la Tierra, el tamaño de una celda de 3 arcosegundos no cubre la misma superficie terrestre en metros cuadrados en cualquier lugar del planeta. Sin embargo, dado que el mapa disponible sólo cubre una porción muy pequeña de la superficie terrestre, se consideró que el tamaño de la celda es casi constante y de $\approx 6485,8 \text{ m}^2$, como indica el apéndice B. Por otro lado, este modelo digital de terreno se tradujo al sistema de coordenadas Mercator (UTM) [20], para poder obtener con mayor facilidad las distancias involucradas en las siguientes secciones.



Figura 6.1: Entorno y alrededores de la ciudad de San Carlos de Bariloche, donde se emplaza el sistema de radar pasivo en cuestión.

6.2. Descripción del sistema

El sistema de radar en cuestión utiliza como antena transmisora una de las torres emisoras de Radio Nacional, y como receptora, una antena ubicada en las cercanías del Aeropuerto Internacional Teniente Luis Candelaria, cuya separación es de $L = 10676$ m. Las dos antenas se consideran isotrópicas para el análisis de este trabajo. Las características de las antenas se muestran en la tabla 6.1.

	Transmisora	Receptora
Referencia	Radio Nacional	Aeropuerto
Latitud [°]	−41,132328	−41,139400
Longitud [°]	−71,276208	−71,149400
Altura [m]	30	10
Tipo	isotrópica	isotrópica

Tabla 6.1: Características de las antenas del sistema de radar biestático ubicado en cercanías de San Carlos de Bariloche.

La antena de Radio Nacional es una emisora de radio FM, con portadora centrada en 95,5 MHz y con un ancho de banda de 200 kHz. Estos valores, traducidos a la frecuencia normalizada $\omega L/c$, cubren el rango de 21331 a 21376. La función de transferencia del canal en este rango puede verse en la siguiente sección.

6.3. Función de transferencia con sección eficaz constante

En esta sección se muestra cómo resulta la función de transferencia de canal, considerando múltiples reflexiones de una señal emitida en la antena de Radio Nacional hasta llegar a la antena del aeropuerto. Para realizar este análisis se necesitan criterios para determinar qué objetos del mapa serían representados como reflectores del modelo a analizar. A continuación se explican los criterios utilizados en este trabajo.

En primer lugar, se descartaron aquellas zonas que no tienen línea de vista directa con ambas antenas, ya que representarían caminos de más de una reflexión, y llegan mucho más atenuados a la receptora que los de una reflexión. Esto descarta zonas que, por ejemplo, se sitúan detrás de un pico que obstruye la llegada de señal. Este criterio termina por seleccionar aquellas zonas que surgen de la intersección de las áreas de cobertura de las dos antenas. En la figura 6.2 se muestran estas áreas sobre el mapa de la zona en cuestión.

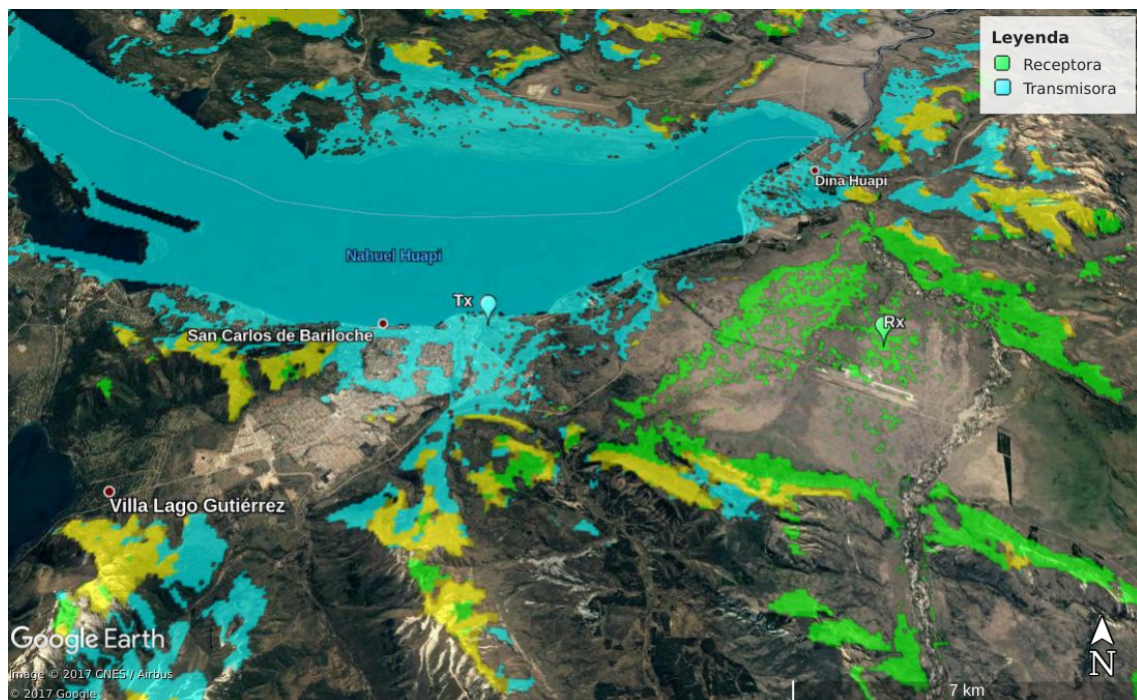


Figura 6.2: Zonas de línea de vista de las antenas transmisora y receptora, ubicadas en Radio Nacional y en cercanías del aeropuerto, respectivamente. En color cian, las zonas de línea de vista de la antena transmisora, en verde las de la receptora, y en amarillo la intersección entre ambas.

En segundo lugar, sobre las zonas elegidas con el primer criterio se distribuyeron reflectores en el grillado uniforme definido por el modelo digital de terreno. Esto significa que cada píxel del mapa disponible es representado por un reflector con una determinada sección eficaz. En esta parte del trabajo se utilizó una sección eficaz constante $\sigma = 10 \text{ m}^2$. Más adelante se representan estos reflectores con sección eficaz dependen-

do de la composición del paisaje que esté representando (bosques, pastizales, piedras, agua, etcétera).

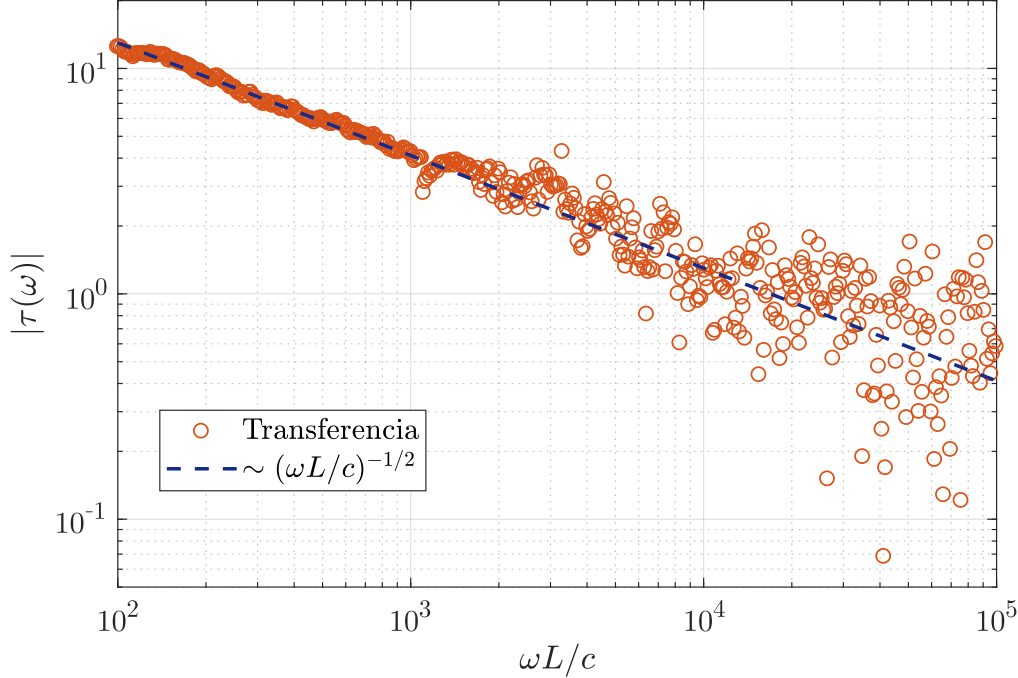


Figura 6.3: Función de transferencia de canal en la zona de alrededores de la ciudad de San Carlos de Bariloche, con antena transmisora en Radio Nacional y receptora en cercanías del aeropuerto, utilizando un modelo digital de terreno con resolución de 3 arcosegundos. Los puntos representan la función de transferencia calculada utilizando el modelo descrito en este trabajo y en línea continua la tendencia $(\omega L/c)^{-1/2}$.

Como se explicó en la sección anterior, el tamaño de los píxeles, en metros cuadrados, no es exactamente constante en cualquier lugar de la Tierra. Aproximadamente, en el mapa disponible, cada uno representa un área de 6485,8 m², como indica el apéndice B. Por lo tanto, si se asume que en el modelo de este trabajo cada uno es representado por un reflector de sección eficaz $\sigma = 10$ m², la sección eficaz por unidad de área (NRCS) resulta ≈ -28 dB.

En la figura 6.3 se muestra la función de transferencia simulada utilizando el modelo digital de terreno disponible, colocando un reflector en cada píxel del mapa con una sección eficaz por unidad de área de -28 dB. Se cubrió un rango de $\omega L/c$ desde 10^2 hasta 10^5 , cubriendo la banda de trabajo del sistema de radar en análisis. La función de transferencia sigue una pendiente (en escalas logarítmicas) de $(\omega L/c)^{-1/2}$, como es de esperarse según lo demostrado en [17].

Esta tendencia en la función de transferencia implica que la potencia de la señal recibida por las múltiples reflexiones en el terreno es inversamente proporcional a la frecuencia de trabajo del sistema biestático. Esto implica que la relación entre potencia que proviene de la reflexión de un objetivo y la potencia de *clutter* es directamente

proporcional a la frecuencia.

6.4. Aleatoriedad en las alturas de reflectores

Sobre el mismo escenario con el que se trabajó en la sección anterior, se realizaron cálculos de la función de transferencia pero con las alturas de los reflectores variables, siguiendo un modelo como el descrito en el capítulo anterior, donde la altura del reflector i ésimo es una variable aleatoria cuya media es la altura extraída del modelo digital de terreno disponible. Con estas condiciones, se realizaron 300 simulaciones con distintas varianzas de la variable Δ_i , que se muestran en el gráfico de la figura 6.4. Los puntos representan las varianzas de las simulaciones con distintos valores de $\omega L/c$, mientras que la línea de trazos marca la tendencia de una función que crece como $\sim \sqrt{\mathbf{V}[\Delta_i]}$.

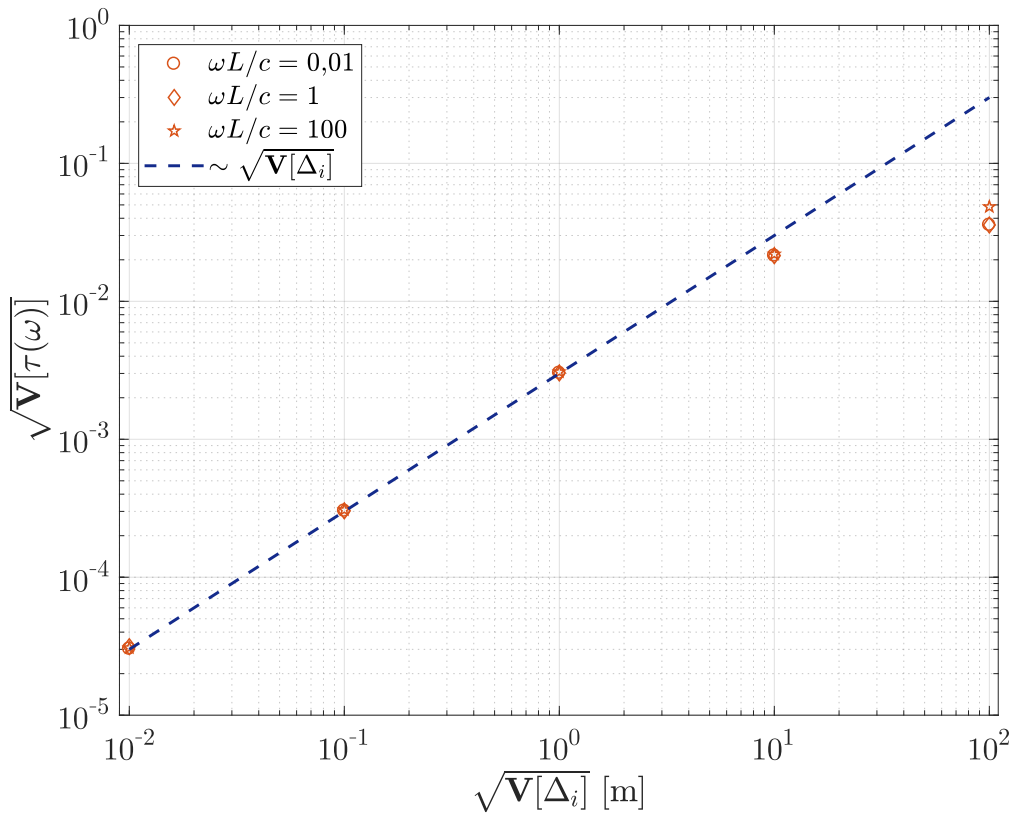


Figura 6.4: Desviación estándar de la función de transferencia con alturas aleatorias de los reflectores, utilizando distintos valores de desviación estándar de los desplazamientos Δ_i , en el escenario de emplazamiento del radar pasivo en alrededores de Bariloche. Los puntos representan desviación estándar para distintos valores de $\omega L/c$, mientras que la línea de trazos muestra una función proporcional a $\sqrt{\mathbf{V}[\Delta_i]}$.

El modelo planteado en el capítulo anterior establecía una tendencia $\mathbf{V}[\tau(\omega)] \propto \mathbf{V}[\Delta_i]$ bajo los límites de que $\Delta_i \ll L, T_i, R_i$. En la figura 6.4, esta relación se cumple

para $\sqrt{\mathbf{V}[\Delta_i]} \lesssim 1$ m, pero para valores mayores que 1 m, la tendencia predicha deja de cumplirse, ya que los valores de Δ_i comienzan a no ser despreciables ante L, T_i, R_i .

6.5. Aplicación en etapa de procesamiento en recepción

En el bloque de recepción, cuando se procesa la señal recibida para extraer información sobre la presencia de un objetivo que se desea detectar, es conveniente tener un estimador previo de la señal recibida sin ese objetivo para luego inferir con mayor facilidad si el objetivo está presente [21]. La señal recibida, muestreada en tiempo, puede expresarse de la siguiente manera [22]

$$y[m] = \sum_l a_l x[m - l], \quad (6.1)$$

donde

$$a_l = \sum_i \frac{\xi_i}{T_i R_i} e^{j2\pi f_c (T_i + R_i)/c}, \quad (6.2)$$

siendo f_c la frecuencia central.

Las señales $x[m]$ e $y[m]$ son las digitalizaciones de $x(t)$ e $y(t)$ en banda base. Cada a_l “sintetiza” todas las reflexiones que suceden en las elipses correspondientes a los retardos temporales desde lt_s hasta $(l+1)t_s$, siendo t_s el período de muestreo, l entero positivo y, naturalmente, $l \geq L/(ct_s)$. Esta última condición surge porque no puede haber un retardo menor que el tiempo que tarda una onda en recorrer la línea de base, L/c . Por lo tanto, cada a_l representa a todos los reflectores que están sobre un determinado anillo de elipse, cuyo espesor depende del tiempo de muestreo.

Con estas consideraciones, se puede estimar la señal recibida estimando los coeficientes a_l . La señal $x[m]$ es conocida en el receptor porque es la señal de rayo directo retardada en L/c . Los coeficientes a_l se pueden estimar conociendo la sección eficaz, las distancias T_i y R_i recorridas por la onda y las atenuaciones de camino. En la figura 6.5 se muestra un detalle de anillos de elipse concéntricos que representan a rangos de retardos temporales de $[lt_s, (l+1)t_s]$ cada uno.

6.6. Cálculo de coeficientes para estimar señal de recepción

Como se explicó en la sección anterior, pudiendo estimar cada coeficiente a_l se puede predecir la señal que se recibiría a partir de las múltiples reflexiones en el terreno, para poder detectar sobre la señal recibida si existe la presencia de algún objetivo de

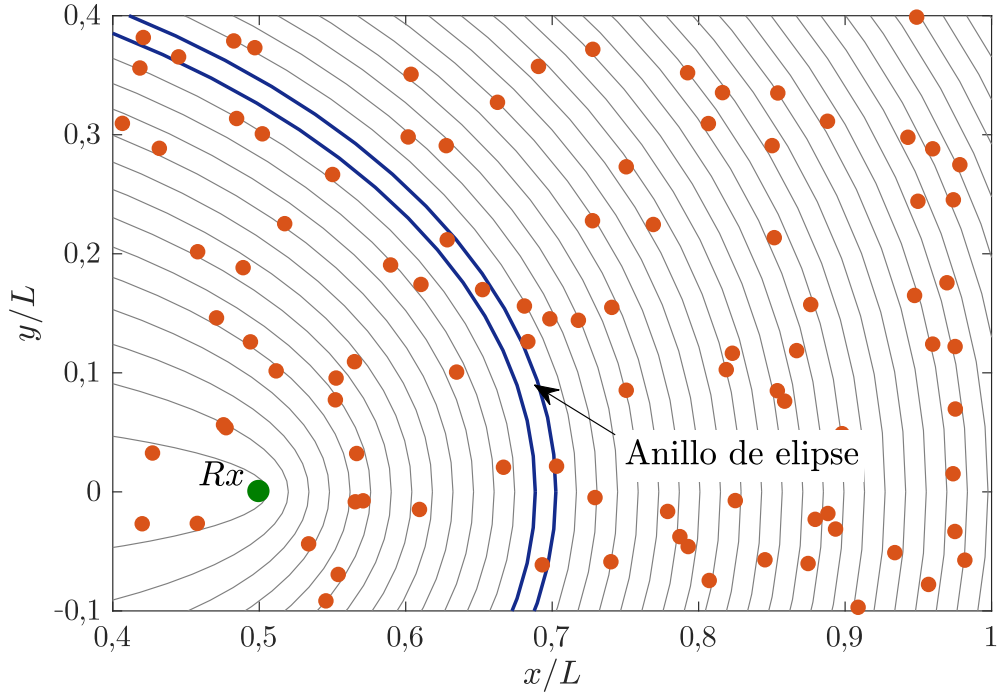


Figura 6.5: Anillos de elipse correspondientes a retardos temporales entre transmisora y receptora en los rangos de $[lt_s, (l+1)t_s]$, con l entero, $t_s = 10^{-6}$ s y $L = 10676$ m. En puntos se muestran reflectores distribuidos aleatoriamente en el mapa.

interés, como un avión. Para estimar los coeficientes, es necesario conocer previamente los múltiples caminos que recorre la señal transmitida. El criterio adoptado para ubicar los lugares de reflexión de la señal fueron los mismos utilizados en la sección 6.3, es decir, utilizando las celdas del mapa disponible, se consideró que había una reflexión en cada celda que tenía línea de vista con la antenna transmisora y receptora. Las zonas de “iluminación” pueden verse en la figura 6.2.

A diferencia de la sección 6.3, se utilizaron datos de sección eficaz obtenidos de acuerdo a la composición de la superficie reflejante [23]. Si bien la sección eficaz bistática depende además de los ángulos de incidencia, reflexión y observación, se escogió una sección eficaz para cada tipo de composición, de modo de simplificar los cálculos. Los valores de sección eficaz por unidad de área se muestran en la tabla 6.2, y la distribución espacial en el mapa de cada composición se muestra en la figura 6.6.

Utilizando la ecuación 6.2, considerando la frecuencia central en 95,5 MHz y un tiempo de muestreo $t_s = 10^{-6}$ s, se puede obtener un gráfico como el de la figura 6.7, en el que se representa el módulo de los coeficientes a_l en función del tiempo, de la forma de l veces el tiempo de muestreo t_s .

En primer lugar, se puede observar en la figura 6.7 que los coeficientes son nulos hasta $l = 36$, que se corresponde con el retardo de una onda electromagnética para recorrer la línea de base desde la antenna transmisora hasta la receptora, y que es igual a L/c . En segundo lugar, se puede observar una disminución sistemática de la amplitud

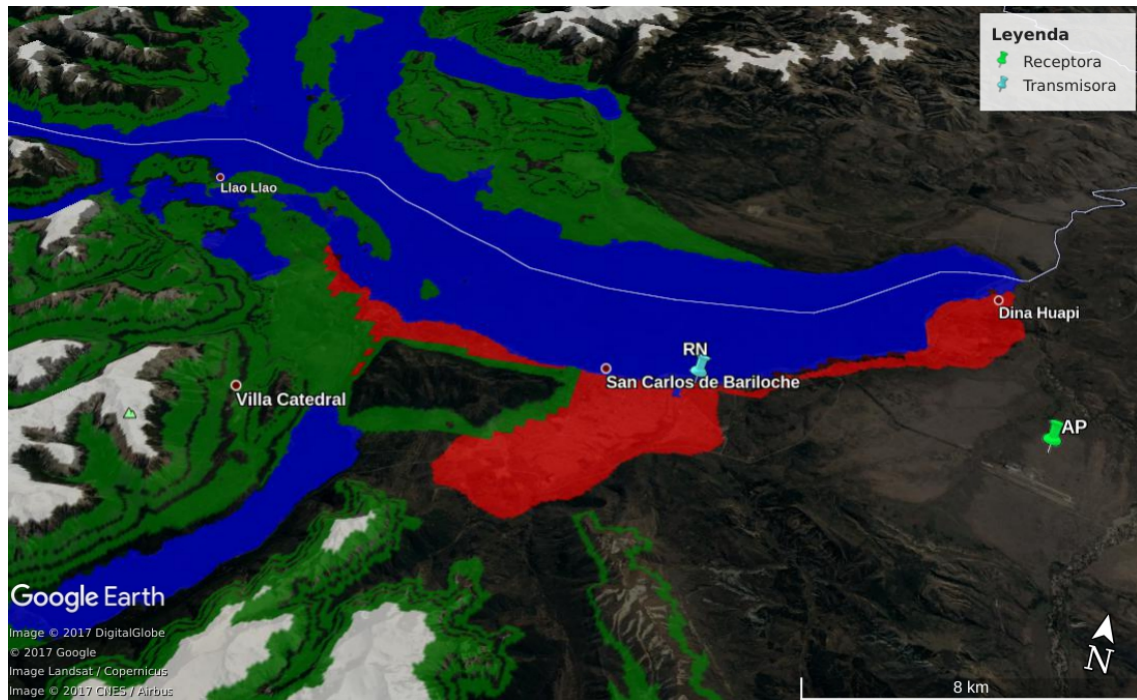


Figura 6.6: Mapa de alrededores de Bariloche con sus composiciones superficiales de paisaje representados con colores. En verde se representan las zonas boscosas, en rojo las zonas urbanas, en blanco la nieve, en azul el agua y sin color, las zonas de pastizal.

Composición	NRCS [dB]	σ [m ²] (*)	ξ [m] (*)
Bosque	-15	205,1	14,3
Urbano	-12	409,2	20,2
Nieve	-15	205,1	14,3
Pastizal	-15	205,1	14,3
Agua	-20 ~ -40	64,9 ~ 0,65	8,1 ~ 0,8

Tabla 6.2: Secciones eficaces normalizadas (NRCS) para distintos tipos de composición, calculadas para ángulos de incidencia y reflexión de 60°, y ángulo de observación de 100°. (*) σ y ξ fueron calculadas para un área de 6485,8 m², que es el tamaño de la celda del mapa de alturas, como indica el apéndice B.

de los coeficientes a_l con el transcurso del tiempo, lo cual está vinculado directamente con la atenuación por distancia recorrida de una señal. Por último, las variaciones de $|a_l|$ que parecen ruido, son picos y valles que representan zonas de mayor y menor reflexión, respectivamente, como por ejemplo zonas más y menos “iluminadas”. La representación de las elipses de la figura 6.5 se puede realizar en el mapa del entorno de Bariloche, como se muestra en la figura 6.8.

6.7. Utilización de modelos empíricos de propagación

Para dar un paso adelante sobre el cálculo de los coeficientes a_l , se decidió introducir otros modelos de propagación distintos al de propagación en espacio libre. Este último asume sólo que la onda electromagnética se propaga como en el espacio libre, con

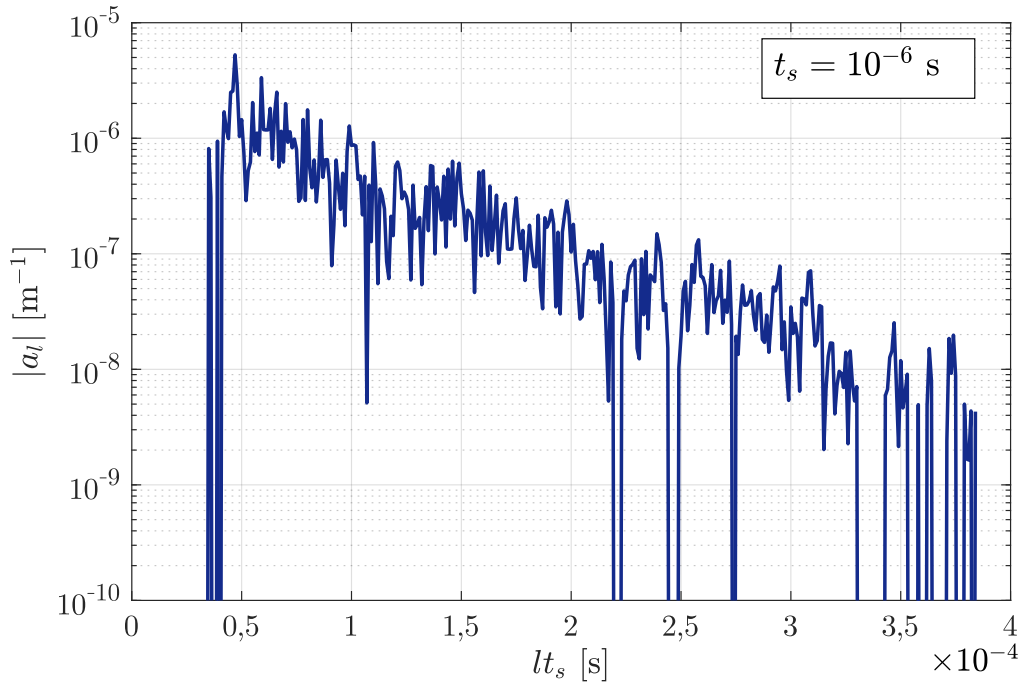


Figura 6.7: Módulo de los coeficientes a_l para ser utilizados en la estimación de la señal recibida a partir de las reflexiones en terreno en radar biestático, utilizando un tiempo de muestreo de $t_s = 10^{-6}$ s.

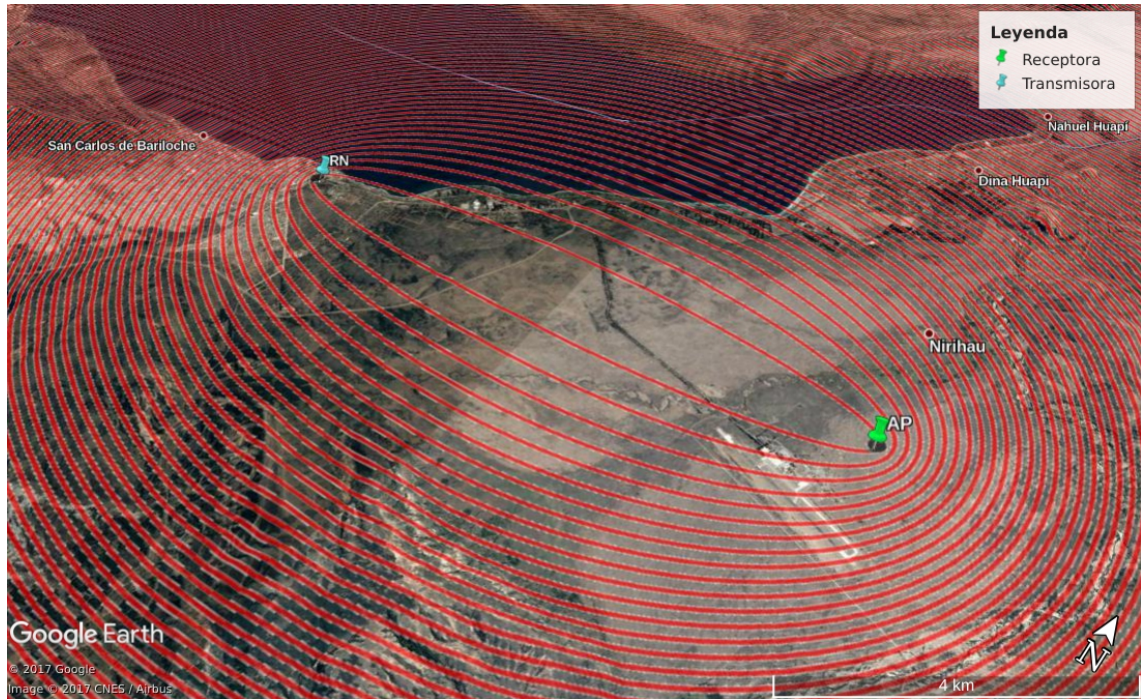


Figura 6.8: Anillos de elipse del sistema de radar pasivo ubicado en Bariloche, correspondientes a retardos temporales entre transmisora y receptora en los rangos de $[lt_s, (l+1)t_s]$, con l entero, $t_s = 10^{-6}$ s y $L = 10676$ m.

una amplitud inversamente proporcional a la distancia recorrida, pero no considera fenómenos de otras naturalezas, como la difracción, la reflexión especular, la refracción atmosférica, etcétera. Por lo tanto, en esta parte del trabajo se introdujeron modelos

empíricos que, de manera estadística, tienen en cuenta estos fenómenos.

Se utilizaron dos recomendaciones de la Unión Internacional de Telecomunicaciones (ITU), la ITU-R P.1546-5 [24] e ITU-R P.1812-2 [25]. La primera, que llamaremos 1546, describe un método para la predicción de la propagación de ondas de radio desde una base a un área, cubriendo el rango de frecuencias desde 30 MHz hasta 3000 MHz, para distancias no mayores que 1000 km. Está basado en la interpolación y extrapolación de mediciones de intensidad de campo en función de la altura de la antenna emisora, la distancia recorrida, frecuencia y porcentaje de tiempo. La segunda, que llamaremos 1812, también describe un método para la propagación de ondas de radio desde una base a un área, pero haciendo uso del perfil de terreno. Cubre el mismo rango de frecuencias que la 1546, y mayores distancias.

En la sección anterior se calcularon los a_l con el modelo de propagación en espacio libre, considerando la ecuación 6.2, utilizando las secciones eficaces de la tabla 6.2, y ubicando un reflector en cada celda del mapa disponible. Con el mismo criterio se calcularon los coeficientes a_l utilizando las recomendaciones 1546 y 1812, pero, en vez de utilizar las distancias T_i y R_i para calcular la atenuación por camino recorrido, se utilizaron las pérdidas calculadas con estas recomendaciones. En las figuras 6.9 y 6.10 se pueden ver mapas de pérdidas por camino recorrido para la antenna de Radio Nacional y la del Aeropuerto con las recomendaciones ITU.

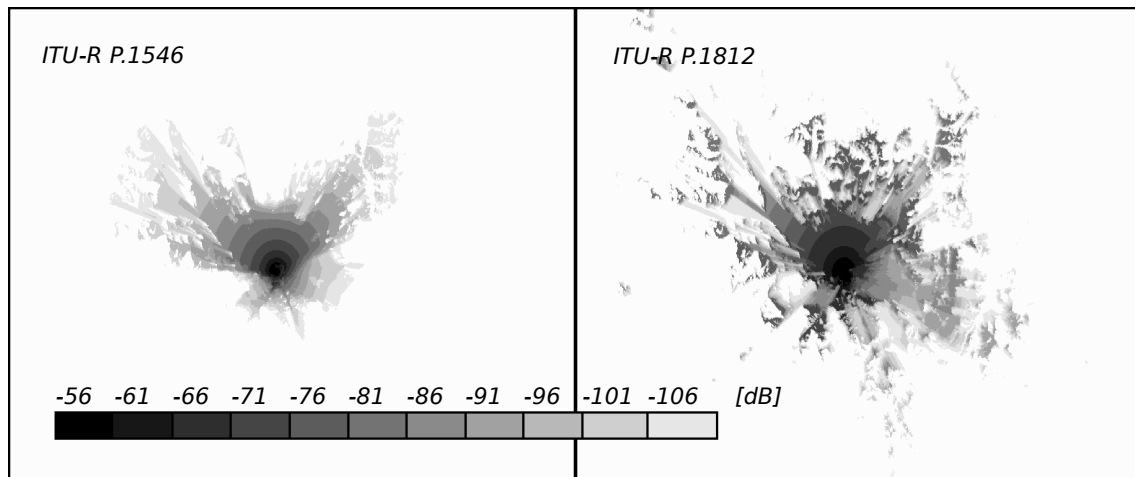


Figura 6.9: Vista aérea de las pérdidas de potencia de señal de la antenna emisora en Radio Nacional con recomendaciones ITU P.1546 y P.1812.

Considerando la frecuencia central en 95,5 MHz y un tiempo de muestreo de $t_s = 10^{-6}$ s, se obtuvieron los gráficos de la figura 6.11, que muestran el módulo de los valores de los coeficientes a_l en función del tiempo. Para distinguir estos coeficientes de los obtenidos con el modelo de propagación de espacio libre, se los denominó como

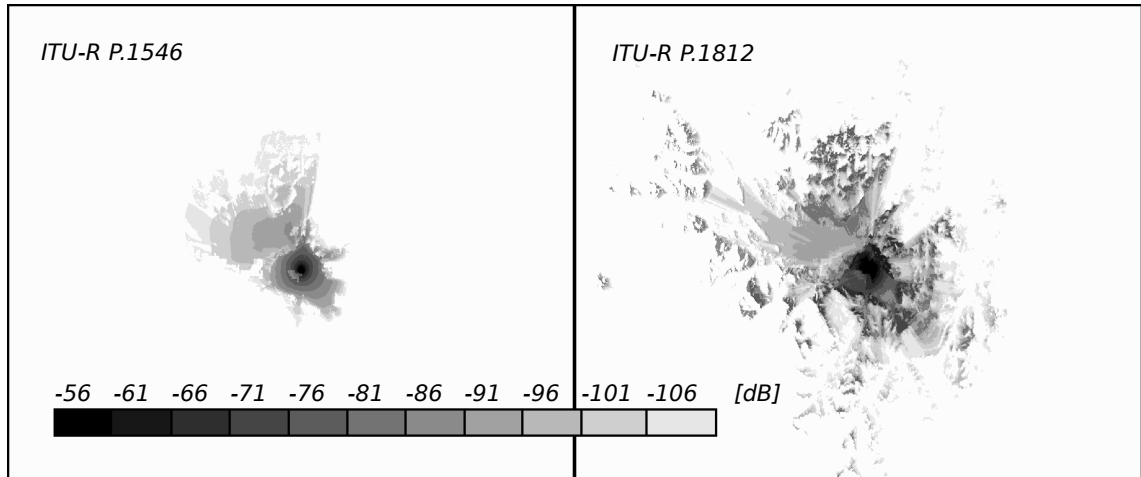


Figura 6.10: Vista aérea de las pérdidas de potencia de señal de la antenna del aeropuerto con recomendaciones ITU P.1546 y P.1812.

b_l y se calcularon como

$$b_l = \sum_i \frac{\xi_i}{\sqrt{L_{T_i} L_{R_i}}} e^{j2\pi f_c (T_i + R_i)/c},$$

siendo L_{T_i} y L_{R_i} las pérdidas de potencia por camino, pasadas a veces, mostradas en las figuras 6.9 y 6.10.

Es necesario resaltar que las unidades de b_l no son las mismas que los a_l del modelo de propagación de espacio libre, ya que en aquél se consideró atenuación de cada reflexión inversamente proporcional a la distancia recorrida, mientras que en éstos, la atenuación está expresada en veces. Sin embargo, esta diferencia no es más que una constante que no afecta el análisis.

Comparando los gráficos de la figura 6.11 con el de la figura 6.7, se puede observar que todas tienen una pendiente (en escala vertical logarítmica) semejante, las tres disminuyen casi tres órdenes de magnitud desde su valor inicial en $t = L/c \approx 36 \mu s$ hasta su valor final en $t \approx 380 \mu s$. Es importante poder distinguir que los tres gráficos poseen “valles” y “picos” en los mismos tiempos, es decir, cualquier conjunto de coeficientes que se utilicen en la recepción para estimar la señal recibida, se comportará de manera similar al resto.

Sin embargo, existe una diferencia entre los tres modelos en las variaciones de pendientes sistemáticas. En la 1812, se pueden definir entre dos y tres ondulaciones sistemáticas en función del tiempo, mientras que en los otros dos modelos estas ondulaciones no se alcanzan a apreciar. Esto sucede porque la recomendación ITU 1812 tiene en cuenta el ángulo de incidencia de la onda en el terreno, por lo que le da más peso a aquellas “caras” de montaña que están de frente a las antenas, y menos peso a las que están orientadas hacia el otro lado. Esto permite ver una correspondencia entre la presencia de una zona montañosa con una ondulación en la pendiente de los

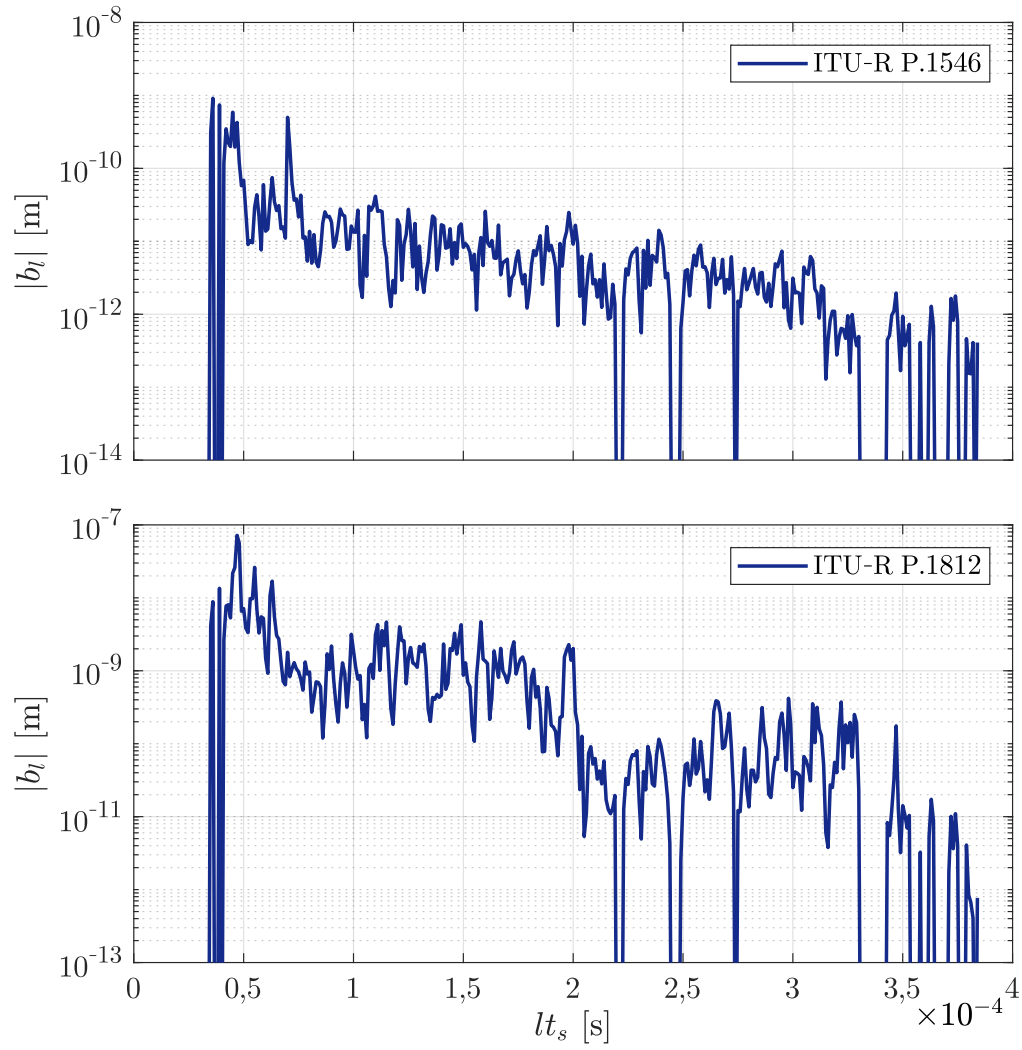


Figura 6.11: Módulo de los coeficientes b_l para ser utilizados en la estimación de la señal recibida a partir de las reflexiones en terreno en radar biestático, calculados con con el uso de las recomendaciones ITU P.1546 y P.1812, utilizando un tiempo de muestreo de $t_s = 10^{-6}$ s.

coeficientes en función del tiempo.

Conclusiones

En primera instancia, en este trabajo se analizó cómo son afectados los sistemas de radar biestático por el *clutter*. El mismo se caracterizó a través de múltiples objetos reflectores que definen una función de transferencia. Esta función de transferencia representa la relación con que llega la señal electromagnética desde la antena transmisora a la receptora habiéndose reflejado en el *clutter*.

Se caracterizó a la función de transferencia como un proceso estocástico en función de la frecuencia ω , realizando simulaciones con distintos parámetros aleatorios en los objetos reflectores, utilizando los modelos de propagación de espacio libre, de reflector puntual y de multicamino. Los resultados obtenidos se pueden resumir en la siguiente lista.

- La aleatoriedad en la posición de los reflectores respecto de una distribución continua en el plano no produce un cambio en la esperanza de la función de transferencia. Pero la varianza es directamente proporcional a la cantidad de reflectores considerados e independiente de la frecuencia.
- La aleatoriedad en la sección eficaz tampoco afecta al valor medio de la función de transferencia. Sin embargo, la desviación de la función de transferencia respecto de su esperanza es proporcional a las desviaciones de la raíz de secciones eficaces respecto de su valor esperado. En este caso, la varianza también es independiente de la frecuencia.
- La aleatoriedad en el cambio de fase cuando se produce una reflexión produce una disminución de la esperanza de la función de transferencia. Se demostró que, para un cambio de fase gaussiano, mientras más grande sea su varianza, menor es la esperanza de la función de transferencia. Para una distribución uniforme, la esperanza se anula totalmente. En este caso, la varianza es independiente de los cambios de fase.
- La aleatoriedad en la posición vertical modifica la esperanza de la función de transferencia en una cantidad que, a primer orden, es proporcional a la varianza de las alturas. Esto sucede tanto en una distribución de *clutter* plana como en una no plana.

La esperanza total de la función de transferencia es entonces la superposición lineal de las esperanzas cuando es afectada por cada uno de estos parámetros de *clutter*. Si además, estos parámetros se asumen independientes entre sí, entonces la varianza total de la función de transferencia es la suma de las varianzas producidas por cada uno.

Como posible trabajo a futuro se puede extender este análisis a objetos reflectores en movimiento, que es muy común en paisajes que tienen objetos con velocidades, como los árboles en los bosques, los pastizales, las olas de un mar, etcétera. Naturalmente, este fenómeno produce corrimiento Doppler, y afecta directamente a la función de transferencia en el rango de frecuencias de la señal transmitida. Si las velocidades son pequeñas respecto de la velocidad de la luz, se puede hacer una aproximación a primer orden del espectro de la señal recibida. Esto se refleja en una componente aditiva de la función de transferencia del *clutter* estacionario, y depende directamente de la derivada del espectro de la señal transmitida por la frecuencia y de la magnitud de las velocidades de los objetos, proyectadas ortogonalmente a las curvas isorrango del sistema biestático.

En segunda instancia, reutilizando los mismos conceptos y modelos, se representó un sistema de radar biestático emplazado en cercanías de San Carlos de Bariloche, con antena transmisora en Radio Nacional y receptora en el aeropuerto. Considerando ambas antenas isotrópicas, se simuló la función de transferencia que representa las reflexiones en el paisaje y se logró identificar, como se había predicho según la fuente citada, un comportamiento de la misma con una tendencia de $(\omega L/c)^{-1/2}$ para $\omega L/c$ grande, siendo L la separación entre antenas y c la velocidad de la luz. Esta tendencia establece que la potencia de señal de *clutter* recibida es inversamente proporcional a la frecuencia.

Además, se extendió el análisis para encontrar un estimador de la señal recibida, de forma que se facilite la detección de objetivos. Digitalizando las señales transmitida y recibida, se buscaron los coeficientes que las relacionan. Se utilizó el modelo de propagación en espacio libre y luego se utilizaron dos modelos de propagación recomendados por la ITU, que tienen en cuenta fenómenos adicionales de propagación. Se encontraron similitudes entre los tres, como el decaimiento sistemático de esos coeficientes en función del tiempo. También se lograron ver las principales diferencias, que están vinculadas a la forma de cálculo de propagación de la onda que considera cada modelo.

Apéndice A

Detalle de cálculos en coordenadas elípticas

El sistema de coordenadas elípticas es un sistema coordenado ortogonal de dos dimensiones. Las coordenadas suelen representarse con las letras griegas μ y ν , y las curvas de coordenadas constantes son elipses e hipérbolas, respectivamente, tal como se indica en la figura 2.4.

En el sistema de radar biestático, las antenas transmisora y receptora están separadas una distancia L y coinciden con los focos de las coordenadas elípticas. Si el sistema cartesiano es representado con origen en $L/2$ y el eje de las abscisas contiene a las posiciones de las antenas, entonces el cambio de variables cartesianas a elípticas es

$$\begin{cases} x = (L/2) \cosh \mu \cos \nu \\ y = (L/2) \sinh \mu \sin \nu. \end{cases}$$

El jacobiano de este cambio de variables puede obtenerse del determinante de la matriz de derivadas parciales,

$$J(\mu, \nu) = \det \begin{pmatrix} \partial_\mu x & \partial_\nu x \\ \partial_\mu y & \partial_\nu y \end{pmatrix} = (L/2)^2 \det \begin{pmatrix} \sinh \mu \cos \nu & -\cosh \mu \sin \nu \\ \cosh \mu \sin \nu & \sinh \mu \cos \nu \end{pmatrix}.$$

Utilizando las propiedades $\cosh^2 \mu - \sinh^2 \mu = 1$ y $\cos^2 \mu + \sin^2 \mu = 1$, resulta $J(\mu, \nu) = (L/2)^2 (\cosh^2 \mu - \cos^2 \nu)$.

Denominando T y R a las distancias de un punto de coordenadas cartesianas (x, y) a los focos, se pueden obtener las siguientes relaciones

$$\begin{aligned} T, R &= \sqrt{(x \pm L/2)^2 + y^2} \\ &= (L/2) \sqrt{\cosh^2 \mu \cos^2 \nu \pm 2 \cosh \mu \cos \nu + 1 + \sinh^2 \mu \sin^2 \nu} \\ &= (L/2) (\cosh \mu \pm \cos \nu), \end{aligned}$$

donde se utilizaron las mismas propiedades que en el jacobiano.

Con estas relaciones establecidas, se puede obtener la suma de las distancias, su producto y la suma de sus cuadrados,

$$\begin{aligned}T + R &= L \cosh \mu, \\TR &= (L/2)^2 (\cosh^2 \mu - \cos^2 \nu) = J(\mu, \nu) \\T^2 + R^2 &= 2(L/2)^2 (\cosh^2 \mu + \cos^2 \nu).\end{aligned}$$

Apéndice B

Coordenadas UTM

Las coordenadas *Universal Transverse Mercator*, o UTM, son un sistema de proyección de la superficie terrestre sobre un espacio de coordenadas cartesiano bidimensional. Este sistema de proyección tiene una correspondencia inyectiva con el sistema de latitud-longitud, es decir, por cada par coordenado de latitud-longitud, existe un par coordenado UTM. A diferencia de ese otro sistema, las magnitudes del UTM se expresan en metros y al nivel del mar.

El sistema UTM divide a la Tierra en 60 husos, cada una de ellas de 6° de longitud. La zona de proyección de cada huso se define entre los paralelos -80° y 84° . Cada uno de los 60 husos utiliza una proyección transversal Mercator, que mapea a una franja bidimensional con muy poca distorsión de longitudes. Esta distorsión no supera la parte por mil en cada huso [20].

En este trabajo, se utiliza un modelo digital de terreno con un grillado regular en el sistema de coordenadas latitud-longitud, con un área de celda de 3 arcosegundos por 3 arcosegundos, en el rango de latitudes desde -40° hasta -42° y de longitudes desde -72° hasta -70° . Resulta así un grillado de 2400 por 2400 celdas, cuyas dimensiones en el sistema UTM no son constantes. Cada celda del modelo digital de terreno varía entre los $6385,8 \text{ m}^2$ hasta los $6582,4 \text{ m}^2$, y la celda central del mapa tiene $6485,8 \text{ m}^2$. Esta última se consideró constante para todo el mapa disponible, obteniendo un error relativo de no más de $1,6\%$ ($< 0,07 \text{ dB}$).

Anexo

Actividades de Práctica Profesional Supervisada

Se declara que las actividades relacionadas a la Práctica Profesional Supervisada consistieron en el trabajo descrito en los capítulos 2, 3, 4 y 5.

Anexo

Actividades de Proyecto y Diseño

En el presente Proyecto Integrador, las actividades de Proyecto y Diseño consistieron en el trabajo descripto en el capítulo 6, es decir, en el cálculo de un estimador para la señal recibida por un radar pasivo en el entorno geográfico de la ciudad de Bariloche, empleando como señal de oportunidad una emisora radiofónica de FM local. Este cálculo incluyó la construcción de un modelo digital del terreno, tanto topográfico como de cobertura (con cinco tipos de composición superficial), y la utilización de tres modelos de propagación, incluyendo dos de las recomendaciones ITU.

Damián H. Zanette

Bibliografía

- [1] Willis, N. J., Griffiths, H. D. Advances in Bistatic Radar. Raleigh, NC. SciTech Publishing, 2007. 1
- [2] Griffiths, H. D. Passive Bistatic Radar, in William L. Melvin and James A. Scheer. Modern Radar Principles. SciTech Publishing, 2014. 1
- [3] Skolnik, M. I. Introduction to radar systems. 3^a ed^{ón}. McGraw-Hill, 2001. Cap. 7. 1, 5
- [4] Richards, M. A. Fundamentals of radar signal processing. McGraw-Hill, 2005. Cap. 1. 3
- [5] Skolnik, M. I. Introduction to radar systems. 3^a ed^{ón}. McGraw-Hill, 2001. Cap. 1. 3
- [6] Doppler effect. URL https://en.wikipedia.org/wiki/Doppler_effect. 4
- [7] Richards, M. A. Fundamentals of radar signal processing. McGraw-Hill, 2005. Cap. 2. 4
- [8] Cherniakov, M. Bistatic Radar: Principles and Practice. Wiley, 2007. 7
- [9] Willis, N. J. Bistatic Radar. 2^a ed^{ón}. SciTech Publishing, 2007. Cap. 1. 7, 8
- [10] Willis, N. J. Bistatic Radar. 2^a ed^{ón}. SciTech Publishing, 2007. Cap. 8. 8
- [11] Skolnik, M. I. Introduction to radar systems. 3^a ed^{ón}. McGraw-Hill, 2001. Cap. 3. 9
- [12] Haykin, S., Veen, B. V. Señales y sistemas. Limusa Wiley, 2001. 9, 15
- [13] Leon-Garcia, A. Probability, Statistics, and Random Processes for Electrical Engineering. 3^a ed^{ón}. Pearson, 2008. Cap. 9. 10
- [14] IEEE. Ieee standard definitions of terms for antennas. *IEEE Std 145-1993*, R.2004. 12

-
- [15] Diffuse reflection. URL https://en.wikipedia.org/wiki/Diffuse_reflection. 13
- [16] Goldsmith, A. Wireless Communications. Cambridge University Press, 2005. 14
- [17] Cabrera, O., Zanette, D. H. Bistatic transfer function for a planar distribution of stationary scatterers: Analytical results. *IEEE Geoscience and Remote Sensing Letters*, 2015. 15, 16, 19, 20, 48
- [18] Multinomial distribution. URL https://en.wikipedia.org/wiki/Multinomial_distribution. 24
- [19] Reflection phase change. URL <http://hyperphysics.phy-astr.gsu.edu/hbase/phyopt/interf.html>. 34
- [20] Universal transverse mercator coordinate system. URL https://en.wikipedia.org/wiki/Universal_Transverse_Mercator_coordinate_system. 45, 61
- [21] Richards, M. A. Fundamentals of radar signal processing. McGraw-Hill, 2005. Cap. 6. 50
- [22] Tse, D., Viswanath, P. Fundamentals of Wireless Communication. Cambridge University Press, 2006. 50
- [23] Mudaliar, S. Bistatic radar clutter simulations using scattering phenomenology. *IEEE Conference on Radar*, 2006. 51
- [24] Itu-r p.1546. URL https://www.itu.int/dms_pubrec/itu-r/rec/p/R-REC-P.1546-5-201309-I!!PDF-E.pdf. 54
- [25] Itu-r p.1812. URL https://www.itu.int/dms_pubrec/itu-r/rec/p/R-REC-P.1812-4-201507-I!!PDF-E.pdf. 54

Publicaciones asociadas

1. Gavier, I. M., Zanette, D. H., Cabrera, O. Stochastic Effects in the Bistatic Transfer Function of a Planar Distribution of Stationary Scatterers. *IEEE Geoscience and Remote Sensing Letters* (en revisión)

Agradecimientos

Intentaré agradecer a todas las personas que me han acompañado durante la carrera, y particularmente durante este trabajo.

Agradezco a mi director, Damián, por su enorme trabajo, dedicación y acompañamiento durante este año y medio de proyecto integrador. También a Octavio, quien estuvo presente y colaboró grandes cantidades al proyecto. Y finalmente, a mis jurados, Javier y Roberto, por las guías ofrecidas durante el avance del trabajo.

Agradezco a todo el cuerpo docente del Instituto Balseiro, especialmente a Inés, Diego Grosz, Franco, Juan Pablo y, nuevamente, a mis jurados, por su dedicación, vocación y exigencia durante el cursado de sus materias.

Agradezco a mis amigos y compañeros del Instituto Balseiro, Gianla y Lucas, por los momentos vividos y disfrutados dentro y fuera del ámbito académico. También a Fede, Ger, Rama, René y Beto, por nuestros asados y no asados. A Nabil, a Pancho, y a la promoción IB14.

Agradezco a mis amigos y compañeros de la Universidad Nacional de Córdoba, Augusto, Nacho, Pelado, Capo, Martín, Agu, Sol, Mery, Consu, Noe, Meli y Reche, con quienes sufrimos y vencimos muchos desafíos académicos, y disfrutamos de muchos otros más placenteros, forjando una gran amistad.

Agradezco fuertemente a mis padres, personas ejemplares, por ser los pilares e impulsores de mi vida y contenerme en cada una de las situaciones difíciles que se me presentaron a lo largo de este camino. También a mis hermanos, que incondicionalmente están presentes con su apoyo, sus energías y sus gracias. También a mi novia, porque en cada día se ha empeñado por darme un enorme acompañamiento, y por todos los momentos que vivimos, fáciles y difíciles, durante el transcurso de esta etapa. A mis dos abuelas, les agradezco intensamente por todo el apoyo y aliento que siempre me han dado. Y finalmente a mis padrinos, que me han acompañado siempre.

Gracias a todos.

Ignacio M. Gavier